Wdhlg.: Matrixinversion mittels elementarer Zeilenumformungen

(S1) Multipl. der i-ten Zeile mit λ

(S2) Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile

(S3) Vertauschung von i-ter mit j-ter Zeile

Umformung von $n \times n$ Matrix A mittels element. Zeilenumformungen $U_1, U_2, \dots, U_k$ zu $\mathbb{1}_n$ ergibt $A^{-1} = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1 \mathbb{1}_n$.

funktioniert ebenso mit elementaren Spaltenumformungen

(Z1) Multipl. der i-ten Spalte mit λ

(Z2) Addition des λ-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte

(Z3) Vertauschung von i-ter mit j-ter Spalte

⚠ entweder nur Zeilenumformungen oder nur Spaltenumformungen!

- Abbildungsmatrix: lin. Abb $A: V \to W$

  Basis B von V

  Basis $\mathcal{E}$ von W

$$\begin{tikzcd}
V \ni v \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & w = A(v) \in W \arrow[d, "\mathcal{E}"] \\
\mathbb{K}^m \ni {}_{B}\tilde{v} \arrow[r, "{}_{\mathcal{E}}A_B"] & {}_{\mathcal{E}}\tilde{w} \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Abbildungsmatrix von A bzgl. Basen B und $\mathcal{E}$

$$\boxed{{}_{\mathcal{E}}A_B = \Big({}_{\mathcal{E}}(A(b_1)), \; {}_{\mathcal{E}}(A(b_2)), \; \dots, \; {}_{\mathcal{E}}(A(b_m)) \Big)}$$

„Bilder$^{(*)}$ der Basisvektoren = Spalten der Abb.matrix"

$(*)$ in Komponenten bzgl. $\mathcal{E}$

$$\leadsto \qquad {}_{\mathcal{E}}\tilde{w} = {}_{\mathcal{E}}A_B \, {}_{B}\tilde{v}$$

Bsp: $A = \frac{d}{dx} : P_3 \to P_2$, $\quad B = (1, x, x^2, x^3)$

$\mathcal{E} = (1, x, x^2)$

$$\to \quad {}_{\mathcal{E}}A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\ulcorner \quad f = 2x - 3x^2 + x^3 \quad \leadsto \quad {}_{B}f = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto \quad {}_{\mathcal{E}}\tilde{w} = {}_{\mathcal{E}}A_B \, {}_{B}f = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad w = A(f) = 2 - 6x + 3x^2 \quad \lrcorner$

dieselbe Abb. $A = \frac{d}{dx} : P_3 \to P_2$,

andere Basis $B' = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $b_1 = 1 + x + x^2 + x^3$

$b_2 = 1 + x + x^2 - x^3$

$b_3 = 1 + x - x^2 - x^3$

$b_4 = 1 - x - x^2 - x^3$

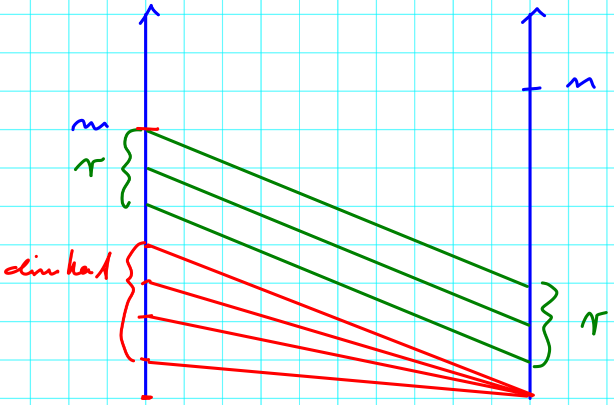
$$\longrightarrow \quad {}_{\mathcal{C}}A_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Problem: gegeben sei lin. Abb. $A: V \to W$, finde Basen B und $\mathcal{C}$ so, dass die Abb.-matrix ${}_{\mathcal{C}}A_B$ möglichst einfach ist!

$m = \dim V$

$n = \dim W$

$r = \operatorname{Rg}(A) = \dim \operatorname{Im} A$



$\hookrightarrow$ Dimensionsformel:

$$\underline{m} = r + \dim \operatorname{Ker} A$$

1) Basis B:

Sei $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_m$ Basis von $\operatorname{Ker} A$, kann durch Vektoren $b_1, \dots, b_r$ zu einer Basis B von V vervollständigt werden:

$$B = (\underbrace{b_1, \dots, b_r}_{\xrightarrow{A} \operatorname{Im} A}, \underbrace{b_{r+1}, \dots, b_m}_{\xrightarrow{A} 0_W})$$

$$\mathcal{B} = (\underbrace{b_1, \dots, b_r}_{\xrightarrow{A} \operatorname{Im} A}, \underbrace{b_{r+1}, \dots, b_m}_{\xrightarrow{A} 0_W})$$

2) Basis $\mathcal{C}$: wähle Basisvektoren

$$c_1 = Ab_1, \quad c_2 = Ab_2, \quad \dots, \quad c_r = Ab_r \quad ,$$

vervollständige mit $c_{r+1}, \dots, c_n$ zu Basis

$$\mathcal{C} = (c_1 = Ab_1, c_2 = Ab_2, \dots, c_r = Ab_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$$

von W.

$$\Rightarrow \quad {}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \overset{= \mathbb{1}_r}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 & 0 & & 0 \\ | & | & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{m-r}$$

$$\overset{\nearrow}{r} = \operatorname{Rg} A \quad !$$

Transformation der Abbildungsmatrix unter Basiswechsel

$\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$

$\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} \overset{?}{\longleftrightarrow} {}_{\mathcal{C}'}A_{\mathcal{B}'}$$

betrachte kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^m \arrow[rrr, "{}_{\mathcal{C}'}A_{\mathcal{B}'}"] & & & \mathbb{K}^n \\
& V \arrow[ul, "\mathcal{B}'"'] \arrow[r, "A"] \arrow[dl, "\mathcal{B}"] \arrow[u, phantom, "/\!/\!/"] \arrow[l, phantom, "/\!/"] & W \arrow[ur, "\mathcal{C}'"] \arrow[dr, "\mathcal{C}"'] \arrow[r, phantom, "/\!/"] \arrow[d, phantom, "/\!/"] & \\
\mathbb{K}^m \arrow[rrr, "{}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}"'] \arrow[uu, "S"] & & & \mathbb{K}^n \arrow[uu, "T"']
\end{tikzcd}$$

$S(b_i) = b_i'$

$S^{-1}(b_i') = b_i$

$T(c_i) = c_i'$

$T^{-1}(c_i') = c_i$

$$\to \boxed{{}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} = T^{-1}\,{}_{\mathcal{C}'}A_{\mathcal{B}'}\,S}$$

Def Matrixäquivalenz

A, A' sind äquivalente Matrizen

$:\Longleftrightarrow$ es ex.en Isomorphismen S, T so, dass

$$A = T^{-1} A' S$$

damit gezeigt: Alle Abbildungsmatrizen einer lin. Abb $A : V \to W$ mit Rang r sind äquivalent zu

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M(n \times m)$$

$n = \dim W$

$m = \dim V$

→ "Nebenprodukt":

$n \times m$ Matrix A

$$\boxed{\mathrm{Rg}(A) = \text{Spaltenrang von } A \overset{!}{=} \text{Zeilenrang von } A}$$

= Anzahl linear unabhängigen Spalten

= Anzahl der linear unabhäng. Zeilen

1) Spalten- und Zeilenrang sind invariant unter Äquivalenztransformation: $A \to A' = T^{-1} A S$

(✓ vgl. G. Fischer)

2) Matrix A vom $\mathrm{Rg}(A) \equiv$ lin. Abb. A vom $\mathrm{Rg}(A)$

→ alle Abb.matrizen von A sind äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

insbesondere ist

$$A = {}_{E_n}A_{E_m}$$

äquivalent zu $(*)$, mit Zeilenrang = Spaltenrang $= r = \mathrm{Rg}(A)$!

Abbildungsmatrizen von Operatoren / Endomorphismen auf V :

$$\begin{tikzcd} A: V \arrow[r] & V \\ \text{Basis } B \arrow[u, bend left] & \text{Basis } \mathcal{C} \overset{!}{=} B \ ! \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

bzgl. ein und derselben Basis B !

⌈ wann ?

physikalisch : Operator wirkt auf physikalischen Raum !

mathematisch :

$$\begin{tikzcd} A: V \arrow[r] & V & & \\ B \arrow[u, dash] & B \arrow[u, dash] \arrow[r] & {}_BA_B = T\,{}_{\mathcal{C}}A_B \\ B & \mathcal{C} \arrow[r] & {}_{\mathcal{C}}A_B = T^{-1}\,{}_BA_B\,\mathbb{1} \end{tikzcd}$$

$T \neq \mathbb{1}$

$${}_B(A^n)_B \overset{!}{=} ({}_BA_B)^n$$

$${}_{\mathcal{C}}(A^n)_B = T^{-1}({}_BA_B)^n = T^{-1}(T\,{}_{\mathcal{C}}A_B)^n \neq ({}_{\mathcal{C}}A_B)^n$$

$n \geq 2$ ⌋

Problem : gegeben Operator / Endom. auf V, finde Basis B von V so, dass Abbildungsmatrix ${}_BA_B$ möglichst einfach !

Ausblick : physikalisch relevanten Endom. / Operatoren können durch geeignete Wahl von B auf Diagonalgestalt gebracht werden :

("Diagonalisierung") :

$$A \xrightarrow{B} {}_B A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$B = (b_1, \dots b_n)$: $A b_i \overset{!}{=} \lambda_i b_i$

↑ Eigenbasis von A

↑ b_i Eigenvektor von A mit Eigenwert λ_i

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$: Eigenwerte von A

⌈ Mechanik des starren Körpers:

Hauptträgheitsachsen $\hat{=}$ Eigenvektoren

Hauptträgheitsmomente $\hat{=}$ Eigenwerte

} des "Trägheitstensors"

QM : A = Observable = physikalische Größe

Z möglichen Messwerte $\equiv$ Eigenwerte von A

Eigenzustände = Eigenvektoren .... ⌋

Exkurs:

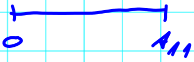
Determinante einer $n \times n$ Matrix A $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

↓

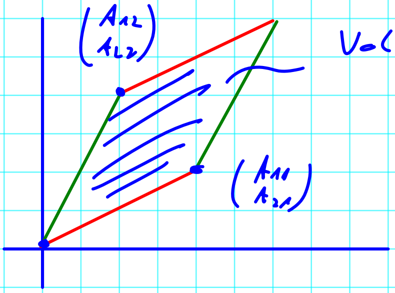
grob: $\det(A) := \mathrm{Vol}_n(A_1, A_2, \dots, A_n)$

↑ n-dim orientierte Volumen des durch $A_1, \dots, A_n$ aufgespannten n-dim. Spat

$\underline{\underline{n=1}}$: $\det(A_{11}) = A_{11}$



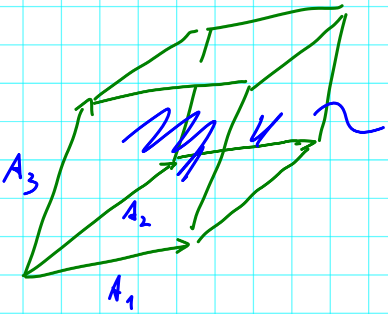
$\underline{\underline{n=2}}$: $\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ 0 \end{pmatrix}\right)_3$



$Vol_2 = $ Fläche

$= A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}$

$\underline{\underline{n=3}}$ $\det(A_1, A_2, A_3) = \langle A_1 \times A_2, A_3 \rangle$ ✓



$Vol_3 =$

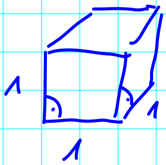
$\underline{\underline{n \geq 4}}$ $Vol_n = ?$

Idee: Eigenschaften von Vol_1, Vol_2, Vol_3

$\rightarrow$ Definition für Vol_n, $n \in \mathbb{N}$!

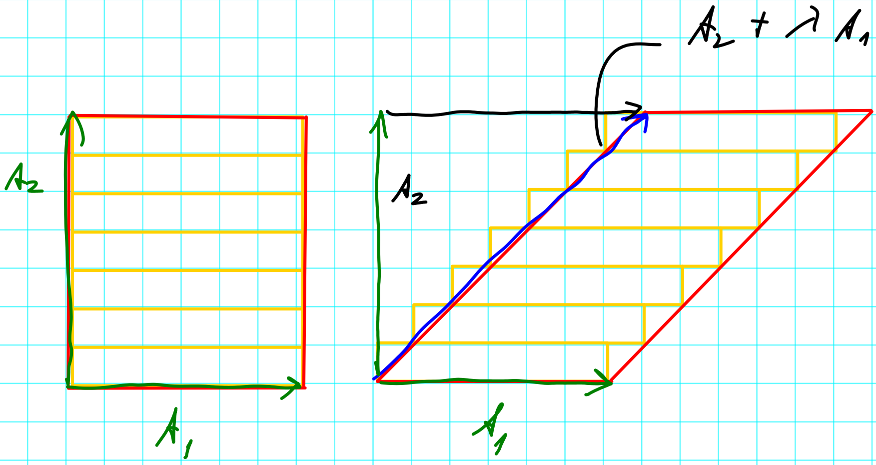
Eigenschaften

$$Vol_n(e_1, e_2, \dots, e_n) \overset{!}{=} 1$$



n-dim. Hyperkubus

2)



3) Skalierung!