MM'14, Blatt 3 – Musterlösung (ohne Gewähr) JP

10. a) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ | $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ ung. Perm. v. } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

oder auch $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \prod_{1 \le p < q \le n} \frac{i_p - i_q}{p - q} = \mathrm{sign}(\pi)$, $\pi \in S_3$ mit $\pi(j) = i_j$

Die Einsteinsche Summenkonvention ist eine implizite Notation für Summationen: Über doppelt auftretende Indices eines Summanden wird summiert.

b) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \sum_j \delta_{ij}\delta_{jk} \cancel{= \begin{cases} 0 & (i \neq j \wedge j \neq k) \\ 1 & (i = j \wedge j = k) \end{cases}}$

Betrachten wir einzelne Summanden: $\cancel{= \delta_{ik}}$ $\delta_{ij}\delta_{jk} \equiv 0$ falls $(i \neq j \vee j \neq k)$.

Für die übrigen Fälle $(i = j \wedge j = k)$ gilt $\delta_{ij}\delta_{jk} = 1 \cdot 1 = 1$

Kehren wir zurück zur Summation über j, so sehen wir, dass $\sum_j \delta_{ij}\delta_{jk}$ nur dann verschieden von Null sein kann, wenn $(i = j \wedge j = k)$, also $(i = k)$ gilt. Dieser Fall kann aber nur für genau einen Wert von j auftreten

$$\Rightarrow \sum_j \delta_{ij}\delta_{jk} = \left.\begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\right\} = \delta_{ik}$$

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} + \varepsilon_{ijk}\delta_{jk}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} - \varepsilon_{ikj}\delta_{jk}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} - \varepsilon_{ikj}\delta_{kj}\right) \equiv 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \begin{cases} (\pm 1)\cdot(\pm 1) = +1 & i = l,\ j = m, \text{ da } (ijk) \text{ und } (klm) \\ \text{für } i \neq k \neq j & \text{beide entweder eine zyklische oder antizyklische Permutation von } (123) \text{ sind} \\ (\pm 1)\cdot(\mp 1) = -1 & i = m,\ j = l, \text{ da } (ijk) \text{ und } (klm) \\ \text{für } k \neq i,\ k \neq j & \text{eine zyklisch und eine antizyklische Permutation von } (123) \text{ sind.} \end{cases}$$

$$\equiv \delta_{il}\cdot\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \begin{cases} 1, & i = l,\ j = m \\ -1, & i = m,\ j = l \end{cases}$$

MM'14, Blatt 3 – Musterlösung (ohne Gewähr) JP

10. c) $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} \underline{a} \times (\varepsilon_{ijk} b_i c_j \underline{\hat{e}}_k)$

$\overset{\text{Def. V.P.}}{=} \varepsilon_{lkm} a_l \underbrace{(\varepsilon_{ijk} b_i c_j)}_{k\text{-te Komponente von } \underline{b} \times \underline{c}} \underline{\hat{e}}_m$

$\overset{\varepsilon_{lkm} = \varepsilon_{kml}}{=} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kml} a_l b_i c_j \underline{\hat{e}}_m$

$\overset{b)}{=} (\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm}) a_l b_i c_j \hat{e}_m$ (es folgt Summation über doppelte Indices)

$= a_j c_j b_i \underline{\hat{e}}_i - a_i b_i c_j \underline{\hat{e}}_j \overset{(*)}{=} (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$

$= \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ = "bac – minus – cab"

$(*)$ mit $(\underline{a} \cdot \underline{c}) = a_j c_j$, $\underline{b} = b_i \underline{\hat{e}}_i$, $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = a_i b_i$, $\underline{c} = c_j \underline{\hat{e}}_j$ mit Einsteinscher Summenkonvention.

d) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\varepsilon_{ijk} a_i b_j \underline{\hat{e}}_k) \cdot (\varepsilon_{lmn} c_l d_m \underline{\hat{e}}_n)$

$= a_i b_j c_l d_m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \underbrace{(\underline{\hat{e}}_k \cdot \underline{\hat{e}}_n)}_{\delta_{kn}}$

$= a_i b_j c_l d_m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}$

$\overset{b)}{=} a_i b_j c_l d_m (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) = a_i c_i \, b_j d_j - a_i d_i \, b_j c_j$

$= (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$

e) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \overset{d}{=} (\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})(\underline{a} \cdot \underline{b})$

$\Leftrightarrow (\underline{a} \times \underline{b})^2 = \underline{a}^2 \underline{b}^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\theta)^2$

$= a^2 b^2 (1 - \cos^2\theta) = a^2 b^2 \sin^2\theta$ $\quad \theta \in [0, 180°[$

$\Rightarrow |\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\theta$ $\quad \hookrightarrow \sin\theta \geq 0$

11. a) zu zeigen ist: $\underline{f}_i \cdot \underline{f}_j = \delta_{ij}$ $\quad i, j = 1, 2, 3$

$\underline{f}_1 \cdot \underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \frac{1}{2}(\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 + \underbrace{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1}_{= 0, \text{ da } (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \text{ ONB } B} + \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2)$

$= \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) = 1$

$\underline{f}_1 \cdot \underline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2) = \frac{1}{2}(\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2)$

$= 0$

Die übrigen vier Kombination werden analog berechnet, so dass man $\underline{f}_i \cdot \underline{f}_j = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2, 3$ findet.

MM'14, Blatt 3 – Musterlösung (ohne Gewähr) JP

11. b) $\underline{u} = 1\cdot \underline{e}_1 + 2\cdot\underline{e}_2 + 0\cdot\underline{e}_3 = (\underline{u}\cdot\underline{f}_1)\underline{f}_1 + (\underline{u}\cdot\underline{f}_2)\underline{f}_2 + (\underline{u}\cdot\underline{f}_3)\underline{f}_3$

$\underline{u}\cdot\underline{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 3\,, \quad \underline{u}\cdot\underline{f}_2 = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{u}\cdot\underline{f}_3 = 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}_{B'}$

$\underline{v}\cdot\underline{f}_1 = (2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 4\cdot 0)\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \underline{v}\cdot\underline{f}_2 = \frac{2+(-3)(-1)+0}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$\underline{v}\cdot\underline{f}_3 = 4 \quad \Rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\5/\sqrt{2}\\4\end{pmatrix}$

12. a) siehe Skript, vgl. Parallelepiped:

$V = \frac{1}{3}A\cdot h = \frac{1}{3}\left|\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}|\underline{u}\times\underline{v}|}_{A}\right)\left(\underbrace{\hat{\underline{n}}\cdot\underline{w}}_{h}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\underbrace{|\underline{u}\times\underline{v}|\,\hat{\underline{n}}}_{\underline{u}\times\underline{v}}\right)\cdot\underline{w}\right|$

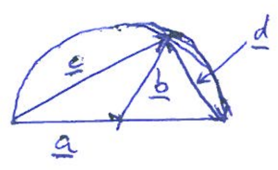
b) Egal in welcher Reihenfolge $\underline{u}$, $\underline{v}$ und $\underline{w}$ genannt werden, sie spannen immer denselben Körper auf, da keiner der drei Vektoren für die Definition des Tetraeders eine ausgezeichnete Rolle spielt: Jeder der drei Vektoren definiert einfach eine von drei Seiten des Tetraeders, durch die die übrigen drei Seiten ebenfalls festgelegt sind.

$V = \frac{1}{6}|\varepsilon_{ijk}u_i v_j w_k| = \frac{1}{6}|\varepsilon_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)}u_i v_j w_k|$

entspricht einer beliebigen Vertauschung von $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

13. a) Liegt der dritte Punkt eines Dreiecks auf dem Halbkreis über der dem Punkt gegenüberliegenden Seite, so ist der Winkel an diesem Punkt ein rechter.

b)



$\underline{c}\cdot\underline{d} = (\underline{a}+\underline{b})\cdot(-\underline{b}+\underline{a}) = \underline{a}^2 - \underline{b}^2$

$= r^2 - r^2 = 0$

$\Rightarrow \underline{c} \perp \underline{d}$

MM'14, Blatt 3 – Musterlösung (ohne Gewähr) JP

14. a) 1. $|\underline{u} \mp \underline{v}|^2 = (\underline{u} \mp \underline{v})\cdot(\underline{u} \mp \underline{v}) = |\underline{u}|^2 \mp 2\,\underline{u}\cdot\underline{v} + |\underline{v}|^2$

$\leq |\underline{u}|^2 + 2|\underline{u}\cdot\underline{v}| + |\underline{v}|^2 \overset{C.S.}{\leq} |\underline{u}|^2 + 2|\underline{u}|\cdot|\underline{v}| + |\underline{v}|^2 = (|\underline{u}|+|\underline{v}|)^2$

$\overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} |\underline{u} \mp \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|$

$\Rightarrow$ 2. $|\underline{u} \mp \underline{v}| - |\underline{v}| \leq |\underline{u}|$; setze $\underline{u} = \underline{x} \pm \underline{y}$ und

$\underline{v} = \underline{y} \Rightarrow |\underline{x}| - |\underline{y}| \leq |\underline{x} \pm \underline{y}|$

oder

$\underline{v} = \pm\underline{x} \Rightarrow |\pm\underline{y}| - |\pm\underline{x}| = |\underline{y}| - |\underline{x}| \leq |\underline{x} \pm \underline{y}|$

$\Big\}\ ||\underline{x}| - |\underline{y}|| \leq |\underline{x} \pm \underline{y}|$

bzw. $||\underline{u}| - |\underline{v}|| \leq |\underline{u} \pm \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|$

b) Die Differenz der Längen zweier Dreiecksseiten ist höchstens so groß wie die Länge der dritten Seite.