Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 10

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 24.06.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

39. Differenzialgleichungen

1+2+2+2+2+4 Punkte

Bestimmen Sie für folgende Differenzialgleichungen jeweils die Lösung $x(t)$ zum Anfangswert x_0 zur Zeit $t_0 = 0$:

$$\dot{x} = -\gamma x, \qquad \dot{x} = x^3, \qquad \dot{x} = \frac{t^2}{x^3}, \qquad \dot{x} = \cos(\omega t)x, \qquad \dot{x} = \frac{x}{1+t}, \qquad \dot{x} = \frac{x}{1+t} + (1+t)^3.$$

40. Ausfluss eines Trichters

3+5+2 Punkte

Betrachten Sie das Abfließen von Wasser aus einem Trichter. Dieser sei gegeben durch einen auf seiner undichten Spitze stehenden Kegel mit rechtwinkligem Öffnungswinkel, der bis zur Höhe h_0 mit Wasser gefüllt ist.

a) Erklären Sie, warum für den Flüssigkeitsfüllstand $h(t)$ die Differentialgleichung $\dot{h} = -\alpha/h$ gilt. Hierbei bezeichnet α eine durch die physikalischen Gegebenheiten bestimmte Konstante. (**Tip:** Die Betrachtung verläuft bis auf die Abhängigkeit der Grundfläche von der Höhe analog zum Zylinderfall aus der Vorlesung.)

b) Geben Sie nun die Lösung der eben gegebenen Differentialgleichung für h zum Anfangswert h_0 bei $t_0 = 0$ an und skizzieren Sie diese. Zu welchem Zeitpunkt ist der Trichter leer?

c) Wie Sie sehen, verläuft das Abfließen nicht linear mit der Zeit. Entfernen wir uns von einem kegelförmigen Trichter, lässt sich dennoch $h(t) = h_o - vt$, also eine konstante Abflussgeschwindigkeit $\dot{h}(t) \equiv -v$ erzielen. Welche Abhängigkeit bzw. was müssen wir hierfür ändern? Schlagen Sie aufgrund Ihrer Beobachtung eine geeignete Trichterform vor.

41. Euler-Verfahren

5+3 Punkte

a) Betrachten Sie die Differenzialgleichung $\dot{x} = -\frac{1}{2x}$. Finden Sie numerisch mittels des Euler-Verfahrens eine approximative Lösung $x(t)$ zum Anfangswert $x_0 = 1$ bei $t_0 = 0$. Wählen Sie hierzu eine Schrittweite kleiner als 0.1 und $t \in [0, 1]$.

b) Zeichnen Sie Ihre numerische Lösung und vergleichen Sie diese mit der entsprechenden exakten Lösung. Es steht Ihnen frei, für den numerischen Teil einen Computer zu benutzen.

42. Eindeutigkeit *4 Punkte*

Wir betrachten die Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit der stetigen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & : \quad x > 0 \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass für jedes $\tau \geq 0$ die Funktion

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \leq \tau \\ \frac{1}{4}(t-\tau)^2 & : \quad t > \tau \end{cases}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung zum Anfangswert $x_0 = 0$ bei $t_0 = 0$ ist. Skizzieren Sie die Lösungen für $\tau = 0$, $\tau = 1$ und $\tau = 3$. Wie erklären Sie sich, dass es hier unendlich viele Lösungen $x_\tau(t)$, $\tau \in \mathbf{R}_+$ für ein und denselben Anfangswert $x_0 = 0$ gibt?

43. Verfaulende Vegetation *5 Punkte*

In tropischen Wäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von 80% pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich neue Bio-Masse an, sagen wir 7 Gramm pro Quadratzentimeter und Jahr. Stellen Sie eine Differenzialgleichung für die Menge $u(t)$ des Abfalls auf einem Quadratzentimeter auf und lösen Sie diese. Zu welchem stationärem Wert konvergiert $u(t)$ für große Zeiten t?