Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 10

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 01.07.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

44. Teilchen im Stömungsfeld

3+4=7 Punkte

Eine zweidimensionale Strömung sei durch das Geschwindingkeitsfeld $\underline{V}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -\beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix}$ mit $\beta > 0$ gegeben.

a) Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld und diskutieren Sie anhand dieser Skizze die Bahnen von Partikeln in dieser Strömung. Welche Bahnen ergeben sich etwa für Partikel an Anfangsorten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$?

b) Die Bahn $\underline{x}(t)$ eines Partikels in der Strömung genügt offenbar der Gleichung $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{V}(\underline{x}(t))$. Finden Sie die allgemeinen Lösungen dieser Bewegungsgleichung mittels der Exponentialansätze $\underline{x}_I(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_I t}$ und $\underline{x}_{II}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_{II} t}$. Bestimmen Sie anhand Ihrer Lösung nun die exakten Bahnen $\underline{x}(t)$ zu den unter **a)** genannten Anfangsorten. Skizzieren Sie diese Bahnen.

45. Hyperbelfunktionen

3+2+3+1+1=10 Punkte

a) Zeigen Sie mittels der Euler-Formel, dass

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i},$$

und folgern Sie hieraus, dass

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x .$$

b) Die hyperbolischen Pendants zu den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sind *Sinus Hyperbolicus* und *Cosinus Hyperbolicus*, definiert durch

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

Skizzieren Sie sowohl $\cosh x$ als auch $\sinh x$.

c) Zeigen Sie, dass

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x .$$

d) Zeigen Sie, dass

$$\sin(ix) = i \sinh x, \quad \cos(ix) = \cosh x\,.$$

e) Wie lauten die Potenzreihendarstellungen von $\sinh x$ und $\cosh x$?

46. Komplexe Zahlen *6+2+2=10 Punkte*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $z = x + iy$:

$$(1+2i)(2-3i), \quad \frac{3i}{1+i}, \quad \frac{3i}{1+i} + 3\mathrm{e}^{i\pi/3}, \quad \mathrm{e}^{-\ln 2 + 4\pi i}, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{108}.$$

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt $e^z = 1$.
c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt $e^z = -2$.

47. Zeichnen *10 Punkte*

Zeichnen Sie folgende Mengen in die komplexe Zahlenebene ein:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geq 0\}, \\
M_2 &= \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geq \mathrm{Im}\, z\}, \\
M_3 &= \{\mathrm{e}^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\,\}, \\
M_3 &= \{\mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{6}} \mid n \in \{0,1,2,\ldots,5\}\,\}, \\
M_3 &= \{r\,\mathrm{e}^{2\pi i \frac{n}{6}} \mid r \in [0,1],\ n \in \{0,1,2,\ldots,5\}\,\}, \\
M_3 &= \{r\,\mathrm{e}^{i\varphi} \mid\ r \in [1,2],\ \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\,\}.
\end{aligned}$$