Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 12

Sommersemester 2014

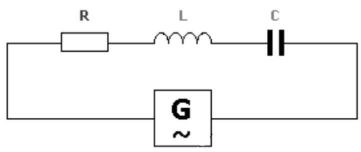
Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 08.07.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

48. Schwingkreis

8+4+8=20 Punkte



Die nebenstehende Skizze zeigt einen extern getriebenen (nämlich über den Generator **G**) Schwingkreis mit Kapazität C, Induktivität L und ohmschem Widerstand R. In dieser Aufgabe wollen wir vereinfachend annehmen, dass der Generator zunächst überbrückt ist, und dass der Kondensator zur Zeit $t = 0$ mit der Ladung Q_0 geladen ist und kein Strom fließt ($I_0 = 0$). Wir können für das System eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung aufstellen, indem wir den Spannungsabfall über den einzelnen Komponenten betrachten. Dieser muss in Summe Null sein, für den Fall, dass keine äußere Spannung anliegt: $U_R + U_L + U_C = 0$. Für die Spannung über R gilt $U_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot \dot{Q}(t)$, über L gilt $U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t) = L \cdot \ddot{Q}(t)$ und über C gilt $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Dies ergibt insgesamt

$$L \cdot \ddot{Q}(t) + R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0.$$

a) Leiten Sie die allgemeine Lösung der gegebenen homogenen linearen Differentialgleichung für $Q(t)$ her. Hierzu ist es ratsam, $Q(t)$ zunächst als komplexwertige Funktion zu betrachten, um einen entsprechenden Exponentialansatz zur Lösung zu machen. Geben Sie schließlich den experimentell messbaren Teil der Lösung an.

b) Für $R = 2\sqrt{L/C}$ (aperiodischer Grenzfall) bekommen Sie über diesen Ansatz nur eine von zwei linear unabhängigen Lösungen, die zur vollständigen Beschreibung des Systems nötig sind. Machen Sie für diesen Fall einen Ansatz für die zweite linear unabhängige Lösung und rechnen Sie nach, dass es sich dabei tatsächlich um eine Lösung der Differentialgleichung für $Q(t)$ handelt.

c) Betrachten Sie nun die vier Fälle $R = 0$ (idealer Schwingkreis), $R < 2\sqrt{L/C}$ (Schwingfall), $R = 2\sqrt{L/C}$ (aperiodischer Grenzfall) und $R > 2\sqrt{L/C}$ (Kriechfall). Diskutieren Sie für die oben genannten Anfangsbedingungen kurz jeden dieser Fälle einzeln, indem Sie explizit die Lösungen für den jeweiligen Fall angeben und skizzieren (nur den experimentell messbaren Teil!).

49. Getriebener Schwingkreis *12+8=20 Punkte*

Nun wollen wir dasselbe System von außen durch eine sinusartige Wechselspannung antreiben, so dass folgende Differentialgleichung zu lösen ist:

$$L \cdot \ddot{Q}(t) + R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = U \cos(\Omega t).$$

a) Leiten Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differentialgleichung für $Q(t)$ her. Hierfür müssen Sie nur noch eine spezielle Lösung $x(t)$ der gegebenen Differentialgleichung finden, da Sie die Lösung der homogenen Differentialgleichung in der vorherigen Aufgabe schon gefunden haben. Nehmen Sie hierzu an, dass $x(t)$ der Realteil einer komplexwertigen Funktion $z(t)$ ist, also $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$, für die dann die Differentialgleichung

$$L \cdot \ddot{z}(t) + R \cdot \dot{z}(t) + \frac{z(t)}{C} = U \exp(i\Omega t)$$

gilt. Diese kann mithilfe des Ansatzes $z(t) = \alpha \exp(i\Omega t)$ gelöst werden, der auf eine Bestimmungsgleichung für den komplexen Parameter α führt. Lösen Sie diese und geben Sie damit $x(t)$ an.

b) Die (reelle!) Amplitude A der speziellen Lösung $x(t) = A \cos(\Omega t - \phi)$ ist abhängig von der Frequenz Ω der äußeren Anregung. Finden Sie das Extremum der Funktion $A(\Omega)$. Diskutieren Sie außerdem das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs von Ω, also für $\Omega \to 0$ und $\Omega \to \infty$. Skizzieren Sie $A(\Omega)$. Skizzieren Sie ebenso die Phase $\phi(\Omega)$.