

---

## Mathematische Methoden – Blatt 13

---

Sommersemester 2014

Webpage: <http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth2014.html/>

Abgabe bis Dienstag, den 15.07.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

### 50. $\delta$ -Distribution

5+1+1+1+2=10 Punkte

a) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{1+x^2} \delta(x-a)$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy y^x \delta(x-2)$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (x+y)^2 \delta(x-y)$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (x-y)^2 \delta(x+y)$$

$$(v) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-R) \quad (\text{Tipp: Kugelkoordinaten!})$$

b) Zeigen Sie mittels Substitution:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(ax) = \frac{1}{a} f(0)$  (d.h.:  $\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$ ).

c) Die Funktion  $h(x)$  besitze eine einzige Nullstelle  $x_0$  und es gelte  $h'(x_0) \neq 0$ . Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(h(x)) = \frac{1}{|h'(x_0)|} f(x_0).$$

d) Die Funktion  $h(x)$  besitze genau  $n$  Nullstellen  $x_1, \dots, x_n$  und es gelte  $h'(x_j) \neq 0$ . Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(h(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|h'(x_j)|} f(x_j).$$

e) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} \delta(x^2 + 2x - 3).$$

## 51. Fourier-Transformation

12+8=20 Punkte

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender Funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, b] \\ 0 & \text{falls } x \notin [0, b] \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\gamma x} e^{ik_0 x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases},$$
$$h(x) = e^{-(x-x_0)^2}, \quad j(x) = 2x e^{-x^2}.$$
$$f_1(x) = \delta(x - x_0), \quad g_1(x) = 1.$$

b) Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$(i) \quad \widehat{f'}(k) = ik \widehat{f}(k)$$
$$(ii) \quad \widehat{f''}(k) = -k^2 \widehat{f}(k)$$
$$(iii) \quad \widehat{f_{x_0}}(k) = e^{-ikx_0} \widehat{f}(k), \quad \text{wobei } f_{x_0}(x) := f(x - x_0).$$

## 52. Fourier-Reihe

2+8=10 Punkte

$f$  sei die 2-periodische Funktion (d.h.  $f(x) = f(x + 2)$ ) mit  $f(x) = x$  für  $x \in [-1, 1[$ .

a) Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  über dem Intervall  $[-5, 5]$ .

b) Stellen Sie  $f$  durch eine Fourier-Reihe dar.