Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 2

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 22.04.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

6. Vektorrechnung

2+9+4=15 Punkte

a) Was ist ein Skalarprodukt und wozu ist es gut?

Sei nun $\mathcal{B} := (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ eine ONB eines Vektorraums mit Skalarprodukt, d.h. eines *euklidischen* Vektorraums. Berechnen Sie für die nebenstehenden Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

$$\underline{a} = 4\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3,$$
$$\underline{b} = -3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_3,$$
$$\underline{c} = 2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

b) die Beträge der Vektoren, die normierten Richtungsvektoren, deren Winkel zueinander,

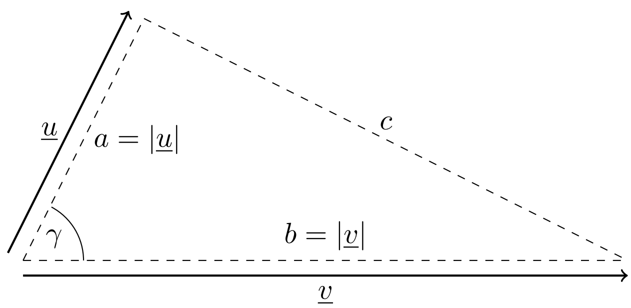
c) den Parallelanteil $\underline{a}_{||}$ und den Orthogonalanteil $\underline{a}_{\perp}$ von $\underline{a}$ bzgl. $\underline{c}$. Verifizieren Sie explizit, dass $\underline{a}_{\perp}$ orthogonal zu $\underline{c}$ ist.

7. Skalarprodukt

2+3+3+3=11 Punkte

a) Wie lautet der Kosinussatz?

b) Beweisen Sie den Kosinussatz mithilfe des Skalarprodukts. Als Inspiration diene nebenstehende Skizze.



c) Seien a und b nun die Kantenlängen eines Parallelogramms, e und f die Längen der Diagonalen. Verfahren Sie analog zu Aufgabenteil **b)**, um $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ zu zeigen.

d) Zeigen Sie schließlich, dass die Diagonalen eines gleichseitigen ($a = b$) Parallelogramms senkrecht zueinander sind.

8. Trigonometrische Additionstheoreme

2+4=6 Punkte

a) Wie lauten die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus?

b) Zeigen Sie

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha) \quad \text{und}$$
$$2\sin^2\alpha = 1 - cos(2\alpha).$$

9. Cauchy-Schwartz-Ungleichung

2+4+2=8 Punkte

a) Wie lautet die Cauchy-Schwartz-Ungleichung?

b) Beweisen Sie für die Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{v}$ die *Dreiecksungleichung*

$$|\underline{u} - \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|$$

unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwartz-Ungleichung.

c) Warum heißt die Dreiecksungleichung *Dreiecks*ungleichung?