Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 3

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 29.04.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

10. Doppeltes Kreuzprodukt

3+4+4+4=15 Punkte

a) Wie sind ϵ_{ijk} und δ_{ij} definiert und was besagt die Einsteinsche Summenkonvention?

b) Zeigen Sie (z.B. durch explizites Nachrechnen unter Verwendung der Symmetrie des jeweiligen Objekts bei Vertauschung der Indices) die drei nebenstehenden Identitäten

$$\delta_{ij}\delta_{jk} \equiv \delta_{ik},$$
$$\epsilon_{ijk}\delta_{jk} \equiv 0,$$
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \equiv \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

c) Zeigen Sie nun (mithilfe der eben bewiesenen Identitäten) die sogenannte *Grassmann-Identität* $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \equiv \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$. Sie wird aus offensichtlichen Gründen auch *bac-minus-cab-Regel* genannt.

d) Zeigen Sie ebenso die *Langrange-Identität* $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) \equiv (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$.

e) Zeigen Sie, dass für $\underline{c} = \underline{a}$ und $\underline{d} = \underline{b}$ aus der Lagrange-Identität $|\underline{a} \times \underline{b}| \equiv |\underline{a}||\underline{b}| \sin\theta$ folgt. Hierbei ist θ der Winkel zwischen $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

11. Orthonormalbasis

3+3=6 Punkte

Gegeben sei eine ONB $\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ und außerdem die Vektoren $\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$, $\underline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ und $\underline{f}_3 = \underline{e}_3$.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathcal{B}' = (\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3)$ ebenfalls um eine ONB handelt.

b) Berechnen Sie für die beiden nebenstehenden Vektoren die Darstellung in $\mathcal{B}'$. [Tipp: $\underline{u} \cdot \underline{f}_i \ldots$]

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

12. Tetraeder

3+3=6 Punkte

a) Beweisen Sie, dass das Volumen eines von den Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$ und $\underline{w}$ aufgespannten Tetraeders

$$V = \frac{1}{6}|(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}|$$

beträgt. Benutzen Sie hierzu, dass hier $V = \frac{1}{3}$Grundfläche · Höhe gilt.

b) Argumentieren Sie zunächst geometrisch, dass das Volumen des Tetraeders invariant (unverändert) unter Permutation (Vertauschung) der Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$ und $\underline{w}$ sein muss. Zeigen Sie dann, dass dies auch für die von Ihnen soeben hergeleitete Formel gilt.

13. Satz des Thales

2+4=6 Punkte

a) Wie lautet der Satz des Thales?

b) Beweisen Sie den Satz des Thales mithilfe des Skalarprodukts.

14. Dreiecksungleichung II

5+2=7 Punkte

a) Beweisen Sie diesmal die vollständige Dreiecksungleichung, die insbesondere eine Abschätzung nach unten enthält:

$$\big|\, |\underline{u}| - |\underline{v}| \,\big| \;\leq\; |\underline{u} \pm \underline{v}| \;\leq\; |\underline{u}| + |\underline{v}|.$$

b) Interpretieren Sie die Abschätzung nach unten analog zu **9. c)**.