Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 4

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 6.05.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

15. Skalarprodukt

1+3+4+2=10 Punkte

V sei die Menge der symmetrischen, quadratintegrablen Funktionen über dem Intervall $[-\pi, \pi]$. D.h. eine Funktion f aus V ist auf $[-\pi, \pi]$ definiert, erfüllt $f(x) = f(-x)$ und das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ existiert. Mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation gegeben durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \qquad (\, f, g \in V, \quad \lambda \in \mathbf{R})$$

bildet V einen Vektorraum. Ein Skalarprodukt definiert durch

$$f \cdot g := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

macht V dann zu einem *euklidischen* Vektorraum.

a) Wie lauten die drei definierenden Eigenschaften eines Skalarprodukts?

b) Zeigen Sie, dass das oben definierte Produkt diese drei Eigenschaften erfüllt.

c) Die Funktionen

$$e_k : x \mapsto e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

sind symmetrisch und quadratintegrabel, und damit Elemente (d.h. *Vektoren*) von V. Zeigen Sie, dass die (unendlich vielen) Funktionen $e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots$ orthonormal zueinander sind. Beweisen und benutzen Sie dazu die Identitäten:

$$\begin{aligned} \int \cos kx \cos nx \, dx &= \frac{\sin[(k-n)x]}{2(k-n)} + \frac{\sin[(k+n)x]}{2(k+n)}, \qquad (k \neq n) \\ \int \cos^2 kx \, dx &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(2kx)}{2k} \right). \end{aligned}$$

Im Folgenden setzen wir voraus, dass die orthonormalen Vektoren $e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots$ tatsächlich eine ONB B von V bilden.

d) f sei eine beliebige Funktion aus V. Bestimmen Sie die Komponenten von f bzgl. der ONB B. Zeigen Sie damit, dass die Funktion f als sog. *Fourier-Reihe*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, \cos kx$$

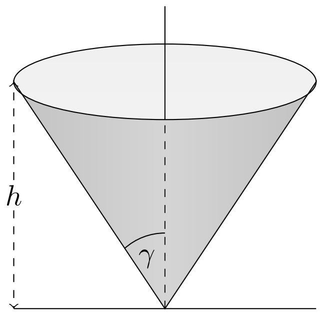
mit *Fourier-Koeffizienten*

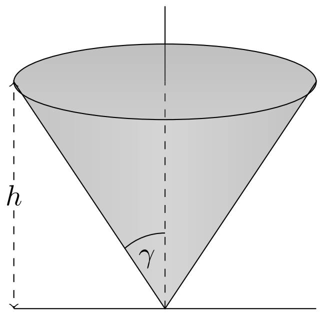
$$f_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

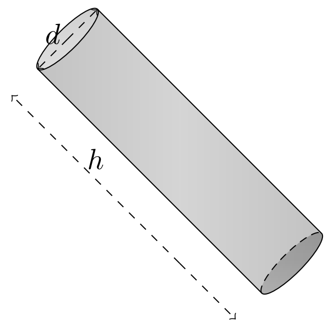
dargestellt werden kann. [Hinweis: Stellen Sie f als Linearkombination der e_k dar: $f = \sum_k f_k e_k$.]

16. Parametrisierungen *2+3+3+2=10 Punkte*

Parametrisieren Sie die abgebildete Kegelfläche, den Vollkegel, den Vollzylinder, sowie die Oberfläche des Zylinders. Ihnen obliegt die hierfür adäquate Wahl des Koordinatensystems. Die Ausrichtung der Objekte sei von Ihnen ebenfalls sinnvoll aber beliebig wählbar.



,


,


.

17. Sphärisches Koordinatensystem *1+6+3+2+2+2+4=20 Punkte*

a) Welchen Bedingungen genügen jeweils zwei beliebige Vektoren $\underline{e}_i$ und $\underline{e}_j$ einer Orthonormalbasis (ONB)?

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\underline{e}_r, \underline{e}_\vartheta, \underline{e}_\varphi$ der lokalen ONB (des sog. Dreibeins) im sphärischen Koordinatensystem diese Bedingungen erfüllen und damit tatsächlich eine ONB darstellen.

c) Berechnen und skizzieren Sie die lokale ONB $(\underline{e}_r, \underline{e}_\vartheta, \underline{e}_\varphi)$ am Südpol S und am Nordpol N einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung O.

d) Skizzieren und parametrisieren Sie die kürzeste Verbindung auf der Kugeloberfläche vom Südpol über den Punkt P_1 mit sphärischen Koordinaten $(r = R, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0)$ zum Nordpol.

e) Skizzieren und parametrisieren Sie nun die kürzeste Verbindung auf der Kugeloberfläche vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 mit sphärischen Koordinaten $(r = R, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi)$.

f) Skizzieren und parametrisieren Sie schließlich die kürzeste Verbindung vom Mittelpunkt O der Kugel zum Punkt P_1.

g) Skizzieren und erklären Sie nun, wie sich das Dreibein jeweils entlang der parametrisierten Kurven in d), e) und f) verändert.