Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 4

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 13.05.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

15. Natürlicher Logarithmus *1+1+2+2+3+1=10 Punkte*

Der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ ist per definitionem die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp\, : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $\exp$ und $\ln$.

b) Zeigen Sie, dass $\ln ab = \ln a + \ln b$ und $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

c) Zeigen Sie, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

d) Sei $\nu \in \mathbf{R}^+$. Zeigen Sie, dass $(x^\nu)' = \nu\, x^{\nu-1}$.

e) Zeigen Sie, dass (für $|x| < 1$)

$$\ln(1-x) = -\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots .$$

f) Entscheiden Sie, ob die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ divergiert oder nicht. [Tip: **e)**!]

16. Taylor-Entwicklung *1+2+7 =10 Punkte*

a) Wie lauten die Potenzreihendarstellungen von $\exp$, $\sin$ und $\cos$?

b) Zeichnen Sie die Graphen von $\sin x$, x, $x - \frac{x^3}{6}$ und $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ in ein Diagramm mit Werten von x zwischen -2 und 2.

c) Entwickeln Sie folgende Funktionen um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung:

$$\frac{1}{1+x}, \qquad \sqrt{1+x}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \qquad \tan x, \qquad \arcsin x\,.$$

17. Zylindrisches Koordinatensystem *3+2+3=8 Punkte*

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$ der lokalen ONB im zylindrischen Koordinatensystem tatsächlich normiert und paarweise orthogonal sind.

b) Berechnen und skizzieren Sie die lokale ONB an den Punkten P_1 und P_2 mit zylindrischen Koordinaten $(r_1 = 1, \varphi_1 = 0, z_1 = 1/2)$ bzw. $(r_2 = 1/2, \varphi_2 = \pi/2, z_2 = 0)$.

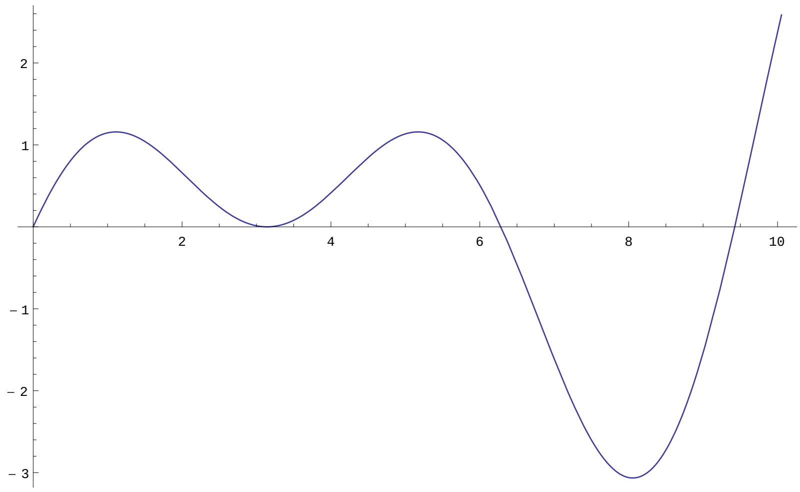
c) Skizzieren und parametrisieren Sie den Weg von P_1 nach P_2, den Sie erhalten, wenn Sie jede Koordinate sukzessive anpassen, also zunächst r von 1 auf den Wert für $1/2$ variieren, dann φ von 0 auf $\pi/2$ und schließlich z von $1/2$ auf 0. Skizzieren und erklären Sie auch, wie sich das Dreibein entlang dieses Wegs verändert.

18. Zeichnerische Ableitung *2+3=5 Punkte*

Das unten dargestellte Diagramm zeigt den Graphen der Funktion f.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung von f.

b) Skizzieren Sie nun den Graphen einer Funktion F, deren Ableitung die Funktion f sein könnte.



19. Ableitung *3+4=7 Punkte*

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung folgender Funktionen:

$$\sqrt{4x}, \qquad \cos((1-x)(1+x))\sin(x^2-1),$$

$$\frac{2\ln(\sqrt{x-2})}{(x-2)^2}, \qquad \mathrm{e}^{-2x^{3/4}} \cdot \mathrm{e}^{6x^{3/4}}.$$

Hierbei ist es natürlich hilfreich, die Ausdrücke vor dem Ableiten soweit wie möglich zu vereinfachen.