Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 6

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 20.05.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

20. Integration *2+2+2+2+2=10 Punkte*

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \ln x \mathrm{d}x$

b) $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$

c) $\int 2t\frac{\cos(t^2)}{\sin(t^2)}\mathrm{d}t$ (Hinweis: Substituieren sie zweimal.)

d) $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$ (Hinweis: Substitution und $\int \frac{1}{1+y^2} = \arctan(y)$)

e) $\int \frac{x}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$

21. Partielle Ableitung *2+2+2+2=8 Punkte*

Bilden Sie für folgende Funktionen alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und überprüfen Sie jeweils, ob der Satz von Schwarz gilt:

a) $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

b) $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

c) $h(x,y,z) = \sin\left(k_1 x + k_2 y + k_3 z\right)$

d) $i(x,y,z) = -(y\ln x + z\ln y - x\ln z)$

.

22. Lineare und quadratische Näherung *3+2+5=10 Punkte*

Es sei die Funktion f auf ganz $\mathbf{R}^2$ vermöge der Vorschrift $(x,y) \mapsto \sqrt{\sin(x)+\cos(y)+2}$ definiert.

a) Berechnen Sie mithilfe des Gradienten die lineare Näherung von f im Punkt $P_1 = (1,2)$.

b) Bestimmen Sie nun die lokale Extremstelle P_2, die dem Ursprung $O = (0,0)$ am nächsten liegt. Berechnen Sie den zugehörigen Funktionswert.

c) Entwickeln Sie die Funktion f an dieser Extremstelle P_2 bis in zweiter Ordnung (quadratische Näherung) . Entscheiden Sie anhand der Form dieses Ausdrucks, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

23. Bahnkurven

2+2+2=6 Punkte

Bezüglich einer ONB $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ seien zwei Bahnen $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$ durch

$$\underline{r}_1(t) = R\cos(\omega t)\underline{e}_1 + R\sin(2\omega t)\underline{e}_2$$

und

$$\underline{r}_2(t) = vt\sin(\omega t)\underline{e}_1 + vt\cos(\omega t)\underline{e}_2 + vt\underline{e}_3$$

gegeben. Hierbei sind R, ω, v konstante Parameter und $t \in \mathbf{R}$ der Zeitparameter.

a) Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven. Zeichnen Sie für die zweite Bahn zunächst die Projektion auf die $\underline{e}_1$-$\underline{e}_2$-Ebene, skizzieren Sie dann grob die Bewegung in drei Dimensionen.

b) Wie lauten die momentante Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ und die momentane Beschleunigung $\underline{a}(t)$ der Beiden Bahnen?

c) Zeichnen Sie jeweils für zwei Zeitpunkte t den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor ein.

24. Sphärische Koordinaten

6 Punkte

Die Transformation von sphärischen Koordinaten (r, ϑ, φ) auf den Ortsvektor $\underline{r}$ leistet bekanntlich die Abbildung

$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto \underline{r}(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

Zeigen Sie, dass die Ihnen bekannten Vektoren $\underline{e}_r, \underline{e}_\vartheta$ und $\underline{e}_\varphi$ der lokalen ONB gerade die normierten partiellen Ableitungen von $\underline{r}(r, \vartheta, \varphi)$ nach r, ϑ und φ sind, also

$$\underline{e}_r = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right|}\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}, \qquad \underline{e}_\vartheta = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}\right|}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}, \qquad \underline{e}_\varphi = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}.$$