Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 7

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 27.05.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik. Besprechung in einer Globalübung am Mittwoch, den 28.05.2014, 12-13:30, im HS II.

25. Ellipse

2+2+2+2=8 Punkte

F sei das durch die Ellipse $\{(x,y,0) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ berandete Flächenstück in der xy-Ebene.

a) Zeigen Sie, dass F durch die Abbildung

$$\begin{aligned} [0,1] \times [0,2\pi] &\to \mathbf{R}^3 \\ (s,\varphi) &\mapsto s \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ b\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

parametrisiert werden kann.

b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt von F durch πab gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass der Umfang einer Ellipse mit Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ (mit $a \geq b$) durch

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi$$

gegeben ist. (Dieses sog. *elliptische Integral* lässt sich nicht auf elementare Funktionen zurückführen.)

d) Ermitteln Sie für kleine Exzentrizität ε eine Näherungsformel für den Umfang der Ellipse. [Hinweis: zuerst Wurzel entwickeln, dann integrieren.]

26. Kreis und Kugel

2+2=4 Punkte

a) Zeigen Sie, dass Umfang und Fläche einer Kreisscheibe mit Radius R durch $2\pi R$ und πR^2 gegeben sind.

b) Zeigen Sie, dass Oberfläche und Volumen einer Kugel mit Radius R durch $4\pi R^2$ und $\frac{4}{3}\pi R^3$ gegeben sind.

Anmerkung: Dieselben Berechnungen lassen sich für die $(n+1)$-dimensionale Einheitskugel D_{n+1} und ihrer n-dimensionalen Oberfläche S_n anstellen. Bemerkenswert hierbei ist, dass der Oberflächeninhalt der S_n für $n = 7$ ein globales Maximum annimmt, um dann für $n \to \infty$ gegen Null zu gehen (`http://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html`).

27. Wegintegral *4+4=8 Punkte*

a) Skizzieren Sie die Schraubenlinie $\underline{r}(\varphi) = \sin\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\varphi\,\underline{e}_2 + \frac{1}{4\pi}\varphi\,\underline{e}_3$, $\varphi \in [0, 4\pi]$, und berechnen Sie ihre Länge.

Nun sei das Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ mit $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gegeben.

b) Skizzieren Sie das Vektorfeld in der xy-Ebene für $z = 0$. Erklären Sie, was sich für $z = 1$ und für $z = -1$ verändert. Berechnen Sie das Wegintegral entlang der gegebenen Schraubenlinie.

28. Flächenintegral *1+5+2=8 Punkte*

In einem Rohr der Länge L mit kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser $2R$ strömt eine Flüssigkeit der Viskosität η aufgrund einer Druckdifferenz ΔP zwischen den Rohrenden. Im Inneren des Rohrs beträgt die Stromdichte (in Zylinderkoordinaten mit $\underline{e}_z$ als Rohrachse)

$$\underline{j}(r, \varphi, z) = k(R^2 - r^2)\,\underline{e}_z,$$

wobei $k = R^2 \Delta P / 2\eta L$.

a) Skizzieren Sie die Stromdichte über den Querschnitt des Rohrs.

b) Berechnen Sie den gesamten Strom durch das Rohr.

c) Um wieviel Prozent verändert sich der Durchfluss, wenn R sich, z.B. aufgrund von Ablagerungen an der Innenwand, um 5% bzw. 50% verringert? Um wieviel Prozent muss damit die Druckdifferenz vergrößert werden, um den ursprünglichen Durchfluss zu erzielen?

29. Volumenintegral *6+6=12 Punkte*

a) Betrachten Sie einen Vollzylinder der Höhe H und des Durchmessers D. Die Dichte ρ des Vollzylinders variiere mit der Höhe z über der Grundfläche: $\rho(z) = \rho_0(1 - z/H)$, $z \in [0, H]$. Berechnen Sie die Gesamtmasse des Zylinders. Bestimmen Sie außerdem den Schwerpunkt.

b) Betrachten Sie nun eine Kugel mit Radius R. Die Dichte ρ der Kugel variiere mit dem Abstand r zum Mittelpunkt: $\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/H)$, $r \in [0, R]$. Berechnen Sie die Gesamtmasse der Kugel. Berechnen Sie außerdem den Schwerpunkt.