Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 9

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2014.html/*

Abgabe (wegen der Pfingstferien) bis Dienstag, den 17.06.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

34. Divergenz und Rotation anschaulich *4+4+4=12 Punkte*

a) Skizzieren Sie die beiden Vektorfelder $\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der xy-Ebene.

Geben Sie anhand dieser Skizzen für beide Vektorfelder jeweils eine Einschätzung über die Divergenz und Rotation ab.

b) Berechnen Sie nun die Divergenz für $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$. Interpretieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Divergenz über die Einheitskugel integrieren und den Satz von Gauß benutzen, um den Fluss (d.h. das Flächenintegral) des jeweiligen Vektorfelds durch die Oberfläche der Einheitskugel zu erhalten.

c) Berechnen Sie auch die Rotation für $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$. Interpretieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Rotation über die Einheitskreisscheibe in der xy-Ebene integrieren und den Satz von Stokes benutzen, um das Linienintegral des jeweiligen Vektorfelds längs des Kreisrands zu erhalten.

35. Elektrisches Feld eines geladenen Drahts *6+4=10 Punkte*

Mit der z-Achse falle ein unendlich langer Draht zusammen. Der Draht sei elektrisch geladen mit einer homogenen Linienladungsdichte λ, d.h. auf der Länge l trage er die Ladung $q = \lambda l$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Sätze von Gauß und Stokes, der elektrostatischen Gleichungen $\operatorname{div} \underline{E} = \rho/\epsilon_0$, $\operatorname{rot}\underline{E} = 0$ und der Symmetrien des Problems das elektrische Feld $\underline{E}(\underline{r})$ des Drahts.

b) Bestimmen Sie ein elektrostatisches Potential $\phi(\underline{r})$ des elektrischen Felds.

36. Satz von Gauß *6 Punkte*

Gegeben sei das Vektorfelds $\underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \\ \gamma z \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, und ein Würfel W der Kantenlänge 2 mit Eckpunkten $(2+\sqrt{2}, 2, 1), (2, 2+\sqrt{2}, 1), (2-\sqrt{2}, 2, 1), (2, 2-\sqrt{2}, 1), (2+\sqrt{2}, 2, 3), (2, 2+\sqrt{2}, 3), (2-\sqrt{2}, 2, 3), (2, 2-\sqrt{2}, 3)$. Bestimmen Sie den Fluss von $\underline{A}$ durch die Oberfläche des Würfels, $\int_{\partial W} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{f}$. Hierfür gibt es einen sehr umständlichen Weg und einen sehr kurzen.

37. Satz von Stokes

6 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \alpha y \\ \beta x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, und ein Flächenstück F in der xy-Ebene, das durch eine Ellipse mit Mittelpunkt $(2, 2, 1)$, Halbachse a in x-Richtung und Halbachse b in y-Richtung berandet sei. Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_{\partial F} \underline{A} \cdot \underline{dl}$. Auch hier gibt es wieder einen sehr umständlichen Weg und einen sehr kurzen. Wie lautet das Integral, wenn F in der xz-Ebene liegt?

38. Kontinuitätsgleichung

6 Punkte

Begründen Sie die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe des Satzes von Gauß.