Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Mathematische Methoden – Blatt 1

Wintersemester 2020

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2020.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3560765.html

Abgabe: Montag, den 09.11.2020, 22:00 Uhr

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg sorgfältig und versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen. Am Dinstag nach der Abgabe werden Lösungshinweise zu den Aufgaben auf ILIAS Seite gestellt. Bitte schauen Sie sich die Aufgaben mit den Lösungshinweisen nocheinmal sorfältig an und bereiten Fragen für das folgende Tutorium vor. Beachten Sie weitere Informationen zum Übungsbetrieb auf ILIAS.

1. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Was ist ein Vektor?

b) Was versteht man unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation?

c) Wie sind lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit eines Systems von Vektoren definiert?

d) Was ist eine Basis eines Vektorraums?

e) Was ist die Dimension eines Vektorraums?

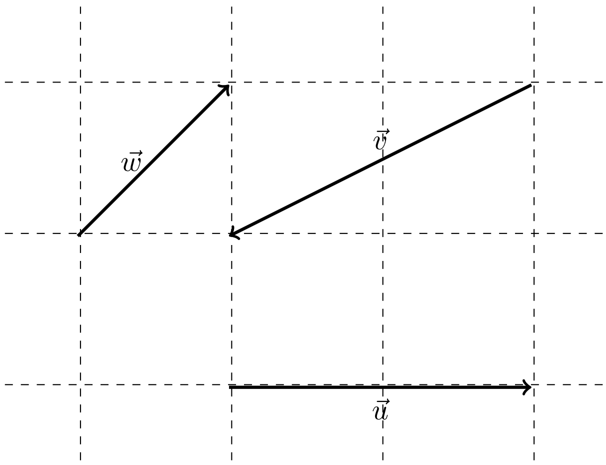
2. Vektoraddition

4+4=8 Punkte

Die in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Pfeile $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ symbolisieren Vektoren, die hier als Parallelverschiebungen zu interpretieren sind. Skizzieren Sie folgende Ausdrücke von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

a) $\vec{u}+\vec{v}, \quad \vec{u}+\vec{w}, \quad \vec{u}-\vec{v}, \quad \vec{v}-\vec{w},$

b) $\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}, \quad -2\vec{w}, \quad \frac{1}{2}\vec{u},$
$2\vec{w}+3(\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}).$



3. Rechnen mit Vektoren

3+3=6 Punkte

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ seien nun *beliebige* Vektoren, α, β positive reelle Zahlen. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $2\alpha\vec{u}+\frac{1}{4\alpha}(2\vec{v}-8\alpha^2\vec{u}), \quad (\alpha+\beta)^2\vec{u}+4\alpha(\vec{w}-\beta\vec{u})-(\alpha-\beta)^2\vec{v},$

b) $2(\vec{u}-2(\vec{v}-2(\vec{w}+\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2^2}\vec{u}))), \quad (\alpha-\beta)\vec{u}+\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}(\vec{v}+\vec{u}).$

4. Basisvektoren

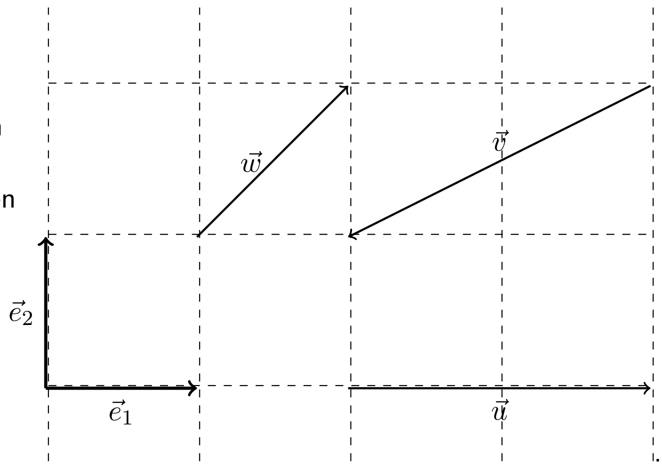
3+3=6 Punkte

$\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ seien die in der nebenstehenden Abbildung skizzierten Vektoren.

a) Schreiben Sie die ebenfalls dargestellten Vektoren $\vec{u}$,$\vec{v}$ und $\vec{w}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.
Wie lauten demnach jeweils die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$,$\vec{v}$ und $\vec{w}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?

b) Skizzieren Sie folgende Vektoren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$



5. Basisdarstellung

4+4+4=12 Punkte

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sei Basis eines zweidimensionalen Vektrorraums. Zwei weitere Vektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ seien gegeben durch

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

a) Schreiben Sie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ jeweils als Linearkombination der Vektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$. Wie lauten demnach die Komponenten und die Komponentendarstellung der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$?

b) Schreiben Sie die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $2\vec{u} + \vec{v}$ in Komponentendarstellung bzgl. $\mathcal{B}'$.

c) Schreiben Sie die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$, $\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$ in Komponentendarstellung bzgl. $\mathcal{B}$.

6. Lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit

4+4=8 Punkte

a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie die folgenden Vektorsysteme auf lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_3), \quad (\vec{v}_2, \vec{v}_3), \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3).$$

Welche Systeme bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

b) Die Funktionen $f_0, f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch $f_0(x) = 1, f_1(x) = 1+x,\ f_2(x) = 1-x$ und $f_3(x) = x+x^2$. Wir fassen sie hier als Vektoren im Vektorraum der ganzrationalen Funktion maximal 2. Grades auf. Welche der folgenden Systeme sind linear unabhängig und zugleich vollständig und bilden damit eine Basis?

$$(f_0, f_1, f_2) \quad ,(f_1, f_2, f_3), \quad (f_0, f_1, f_3), \quad (f_2, f_3), \quad (f_0, f_1, f_2, f_3).$$