Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Mathematische Methoden – Blatt 2

Wintersemester 2020

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2020.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3560765.html

Abgabe: Montag, den 16.11.2020, 22:00 Uhr

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg sorgfältig und versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen. Am Dinstag nach der Abgabe werden Lösungshinweise zu den Aufgaben auf ILIAS Seite gestellt. Bitte schauen Sie sich die Aufgaben mit den Lösungshinweisen nocheinmal sorfältig an und bereiten Fragen für das folgende Tutorium vor. Beachten Sie weitere Informationen zum Übungsbetrieb auf ILIAS.

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist ein Skalarprodukt und wozu ist es gut?

b) Was ist ein *euklidischer* Vektorraum?

c) Ist ein System paarweise orthogonaler Vektoren $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k$ immer zugleich auch linear unabhänging?

d) $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ sei eine ONB. Weshalb ist $\langle \vec{e}_i, \vec{a} \rangle$ die i-te Komponente von $\vec{a}$ bzgl. dieser ONB?

e) Was ist $\sum_{i=1}^{n} \delta_{ii}$, $\sum_{j=1}^{n} \delta_{1j}\delta_{j2}$ und $\sum_{i,j,l=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{jl}\delta_{li}$?

2. Lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit Reloaded *2+8=10 Punkte*

In der Aufgabe *Lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit* sind die Funktionen $f_0, f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert worden durch $f_0(x) = 1, f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = 1 - x$ und $f_3(x) = x + x^2$. Es wurde gezeigt, dass $\mathcal{B} := (f_1, f_2, f_3)$ und $\mathcal{B}' := (f_0, f_1, f_3)$ Basen für den Vektorraum der ganzrationalen Funktion maximal 2. Grades sind.

a) Stellen Sie nun die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ als Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dar.

b) Stellen Sie desweiteren jeweils in den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$' die Funktionen $g(x) = 1 - x + x^2$ und $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ dar. Warum ist eine solche Komponentendarstellung für jede ganzrationalen Funktion maximal 2. Grades möglich? Warum ist diese Darstellung eindeutig?

3. Vektorrechnung *9+3=12 Punkte*

Sei $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ eine ONB eines euklidischen Vektorraums.
Berechnen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \qquad \vec{b} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3, \qquad \vec{c} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

a) die Beträge der Vektoren, die normierten Richtungsvektoren, deren Winkel zueinander,

b) den Parallelanteil $\vec{a}_{||}$ und den Orthogonalanteil $\vec{a}_\perp$ von $\vec{a}$ bzgl. $\vec{c}$. Verifizieren Sie explizit, dass $\vec{a}_\perp$ orthogonal zu $\vec{c}$ ist.

4. Skalarprodukt I

3+1=4 Punkte

Sei $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ eine ONB eines n-dimensionalen Vektorraums mit dem Ihnen bekannten Skalarprodukt. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Zeigen Sie

a) die ONB-Komponentendarstellung des Skalarprodukts

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

b) sowie des Betrags

$$|\vec{v}| = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2}.$$

5. Skalarprodukt II

2+2+2=6 Punkte

Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden drei Abbildungsvorschriften $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um Skalarprodukte handelt:

a) $\vec{v}, \vec{w} \mapsto \vec{v} \frownie \vec{w} = 2v_1(w_1 + w_3) + v_2 w_2 + 2v_3(w_1 + w_3)$,

b) $\vec{v}, \vec{w} \mapsto \vec{v} \smiley \vec{w} = 2v_1(w_1 + w_3) - v_2 w_2 + 2v_3(w_1 + w_3)$,

c) $\vec{v}, \vec{w} \mapsto \vec{v} \heartsuit \vec{w} = 2v_1(w_1 + 3w_3) + v_2 w_2 + 2v_3(w_1 + 3w_3)$.

6. Kosinussatz

0+4+4=8 Punkte

a) Wie lautet der Kosinussatz?

b) Zeigen Sie den Kosinussatz mithilfe des Skalarprodukts. Als Inspiration diene nebenstehende Skizze.

c) Zeigen Sie, dass die Diagonalen eines gleichseitigen ($a = b$) Parallelogramms senkrecht zueinander sind.