Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Mathematische Methoden – Blatt 3

Wintersemester 2020

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2020.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3560765.html

Abgabe: Montag, den 16.11.2020, 22:00 Uhr

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg sorgfältig und versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen. Am Dinstag nach der Abgabe werden Lösungshinweise zu den Aufgaben auf ILIAS Seite gestellt. Bitte schauen Sie sich die Aufgaben mit den Lösungshinweisen nocheinmal sorfältig an und bereiten Fragen für das folgende Tutorium vor. Beachten Sie weitere Informationen zum Übungsbetrieb auf ILIAS.

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Stellen Sie mittels ϵ_{ijk} die k-te Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$ sowie $\langle \vec{a} \times \vec{b},\ \vec{c} \rangle$ dar.

b) Weshalb ist $\langle \vec{a} \times \vec{b},\ \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c},\ \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} \times \vec{a},\ \vec{b} \rangle$?

c) Wie berechnet man das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzgl. einer ONB?

d) Die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien $(0, 0)$, (x_1, x_2) und (y_1, y_2). Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks durch $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ gegeben ist.

e) Gilt das Assoziativgesetz beim Kreuzprodukt, d.h. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \stackrel{?}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$?

2. Doppeltes Vektorprodukt *4+4+4+3=15 Punkte*

a) Zeigen Sie mittels Graßmann-Identität (*bac-cab*-Regel) oder mittels der Identität $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ die *Lagrange*-Identität:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle \equiv \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle.$$

b) Zeigen Sie für den Orthogonalanteil $\vec{a}_\perp$ von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ mithilfe der Graßmann-Identiät:

$$\vec{a}_\perp = (\hat{b} \times \vec{a}) \times \hat{b}.$$

c) Zeigen Sie, dass aus der Lagrange-Identität $|\vec{a} \times \vec{b}| \equiv |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$ folgt. Hierbei ist θ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

d) Zeigen Sie mittels Graßmann-Identität die *Jacobi*-Identität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

3. Orthonormalbasis *3+3=6 Punkte*

Gegeben sei eine ONB $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sowie die Vektoren $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$, $\vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ und $\vec{f_3} = \vec{e}_3$.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathcal{B}' = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ ebenfalls um eine ONB handelt.

b) Berechnen Sie für die beiden nebenstehenden Vektoren die Darstellung in $\mathcal{B}'$.
Tipp: $\langle \vec{u}, \vec{f_i} \rangle \ldots$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

4. Tetraeder *4 Punkte*

a) Zeigen Sie, dass das Volumen eines von den Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Tetraeders

$$V = \frac{1}{6} |\langle (\vec{u} \times \vec{v}), \vec{w} \rangle|$$

beträgt. Benutzen Sie hierzu, dass hier $V = \frac{1}{3}$Grundfläche · Höhe gilt.

5. Vektorraum der ganzrationalen Funktionen *5+3+4+3=15 Punkte*

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller ganzrationalen Funktionen vom Grad kleiner gleich k, also Funktionen der Form $\sum_{l=0}^{k} a_l x^l$, mit Standardaddition und -skalarmultiplikation einen $k+1$-dimensionalen Vektorraum bilden. Diesen nennen wir im folgenden V_k.

b) Wir definieren nun eine Abbildung $\langle .,. \rangle : V_k \times V_k \to \mathbb{R}$,

$$f, g \mapsto \langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x,$$

Zeigen Sie, dass es sich hierbei um ein Skalarprodukt auf V_k handelt.

c) Finden Sie eine orthogonale Basis für V_3 (vernachlässigen Sie also die Normierung).

d) Wie lauten die Winkel zwischen den Vektoren $f(x) = 1$ und $g(x) = x$ sowie zwischen $f(x) = 1$ und $h(x) = x^2$?