Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Mathematische Methoden – Blatt 4

Wintersemester 2020

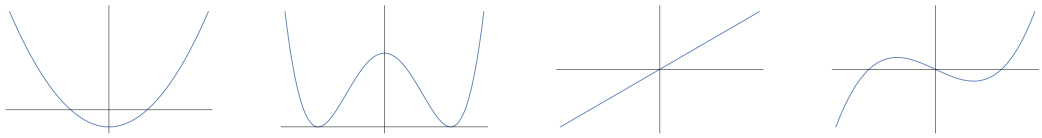
Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth2020.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3560765.html

Abgabe: Montag, den 30.11.2020, 22:00 Uhr

Tauschen Sie sich gegenseitig über die Aufgaben aus und geben Sie in **kleinen Gruppen von zwei oder drei Studierenden** ab.

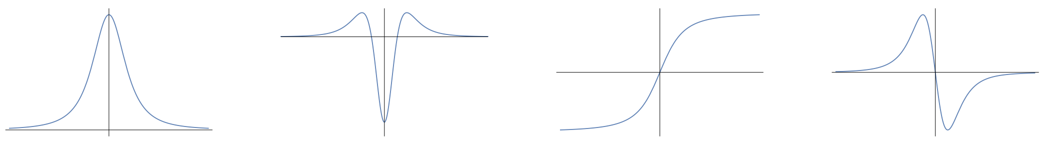
1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Ordnen Sie folgende Abbildungen den Graphen einer Funktion f und deren erste, zweite und dritte Ableitung zu:



Wie könnte die Funktion f lauten?

b) Ordnen Sie wieder die Abbildungen den Graphen einer Funktion g und deren Ableitungen g', g'' und g''' zu:



Wie könnte diese Funktion lauten?

c) Wie bestimmt sich die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ aus der Ableitung der Funktion $f(x)$?

d) Angenommen, Sie erinnern sich nicht mehr an die Ableitung von $\ln x$. Sie wissen aber noch, dass $(e^x)' = e^x$ und $e^{\ln x} = x$. Wie erhalten Sie damit $(\ln x)'$?

2. Lokale Orthonormalbasen *2 + 2 + 8 = 12 Punkte*

a) Berechnen und skizzieren Sie die lokalen ONB $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z)$ an den Punkten P_1 und P_2 mit den Zylinderkoordinaten $(\rho_1 = 1,\ \varphi_1 = 0,\ z_1 = 1/2)$ bzw. $(\rho_2 = 1/2,\ \varphi_2 = \pi/2,\ z_2 = 0)$.

b) Berechnen und skizzieren Sie die lokalen ONB $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\vartheta,\ \vec{e}_\varphi)$ an den Punkten P_1 und P_2 mit den Kugelkoordinaten $(r_1 = 1,\ \vartheta_1 = \pi/4,\ \varphi_1 = 0)$ bzw. $(r_2 = 1,\ \vartheta_2 = \pi/2,\ \varphi_1 = \pi)$.

c) Zeigen Sie, dass die Basisvektoren $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ der Zylinderkoordinaten und $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$ der Kugelkoordinaten jeweils eine lokale ONB bilden.

3. Bahnkurven in Polarkoordinaten

1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte

Die folgenden Ausdrücke beschreiben Bahnkurven in Polarkoordinaten. Skizzieren Sie jeweils die Bahnkurve.

a)

$$r(t) = r_0, \quad \phi(t) = \omega t$$

b)

$$r(t) = r_0 - \frac{1}{2}gt^2, \quad \phi(t) = \frac{3\pi}{2}$$

c)

$$r(t) = vt, \quad \phi(t) = -\omega t$$

d)

$$r(t) = r_0, \quad \phi(t) = \pi + \frac{\pi}{2}\sin(\omega t)$$

4. Bahnkurven in Kugelkoordinaten

3+3+3=9 Punkte

Ein Massepunkt bewegt sich mit betraglich konstanter Geschwindigkeit auf bzw. innerhalb einer Kugel mit Radius R von einem Startpunkt S zur Zeit $t = 0$ zu einem Zielpunkt Z zur Zeit $t = 1$. Geben Sie die Koordinaten der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ in Kugelkoordinaten an und skizzieren Sie die Bahnkurve für folgende Fälle:

a) Kürzester Weg auf der Kugeloberfläche von $S =$ Südpol über den Punkt P mit Kugelkoordinaten $(r_P = R, \vartheta_P = \pi/2, \varphi_P = 0)$ zu $Z =$ Nordpol.

b) Kürzester Weg auf der Kugeloberfläche von $S = P$ (wie in a) zum Punkt $Z = Q$ mit Kugelkoordinaten $(r_Q = R, \vartheta_Q = \pi/2, \varphi_Q = \pi/2)$.

c) Kürzester Weg von $S =$ Mittelpunkt der Kugel zum Punkt $Z = P$ (wie in a)).

5. Ableitung

2+4+4=10 Punkte

a) Bestimmen Sie mittels des Differenzenquotienten die Ableitung von $f(x) = 1/x$.

b) Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung folgender Funktionen:

$$\sqrt{4x}, \qquad \cos((1-x)(1+x))\sin(x^2-1),$$

$$\frac{2\ln(\sqrt{x-2})}{(x-2)^2}, \qquad \mathrm{e}^{-2x^{3/4}} \cdot \mathrm{e}^{6x^{3/4}}.$$

Hierbei ist es natürlich hilfreich, die Ausdrücke vor dem Ableiten soweit wie möglich zu vereinfachen.

c) Bestimmen Sie mittels Ihnen aus der Vorlesung bekannter Regeln die Ableitungen der Funktionen $\arccos(x)$ und $\arcsin(x)$ (Umkehrfunktionen von $\cos(x)$ und $\sin(x)$).