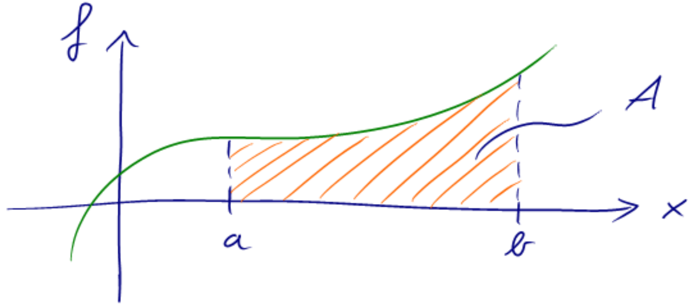
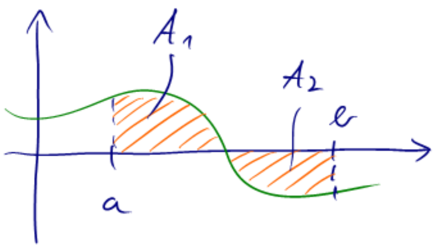
Integral

einer Fkt. f von a bis b: $\int_a^b f(x)\,dx$,

grob:



$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{„Flächeninhalt } A \text{ der durch } a, b \text{ und Graph von } f \text{ definierten Fläche"}}$$

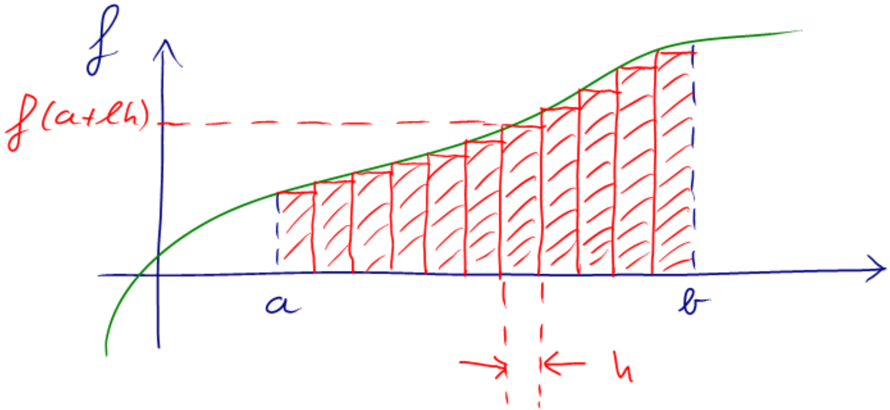


dann: $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$

genauer:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{h\to 0} \sum_{\ell=0}^{(b-a)/h} h\, f(a+\ell h)}$$

$(b \geq a)$



Falls $b < a$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

→ <u>Eigenschaften des Integrals</u>

1)
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

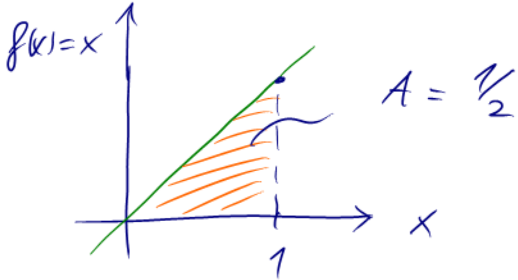
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

<u>Linearität</u>

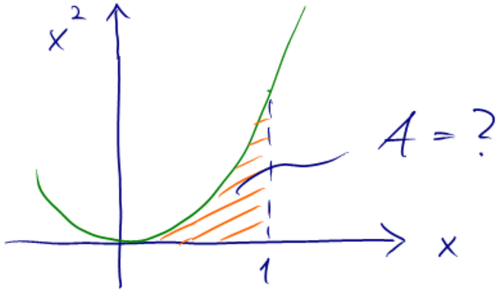
2)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

elementare Beispiele:

1) $$\int_0^1 x\,dx \overset{!}{=} 1/2$$:



2) $$\int_0^1 x^2\,dx = ?$$



$$\sum_{l=0}^{n} l^2 = \frac{1}{3}\, n(1+n)\left(\frac{1}{2}+n\right)$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{l=0}^{1/h} h\,(h l)^2 = h^3 \cdot \frac{1}{3}\; \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\right) \xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{3}, \quad \text{d.h.} \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Wesentlich besser geht es mit dem

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (HDI):

Definition

F ist Stammfunktion von Fkt f g.d.w.

$$F' = f$$

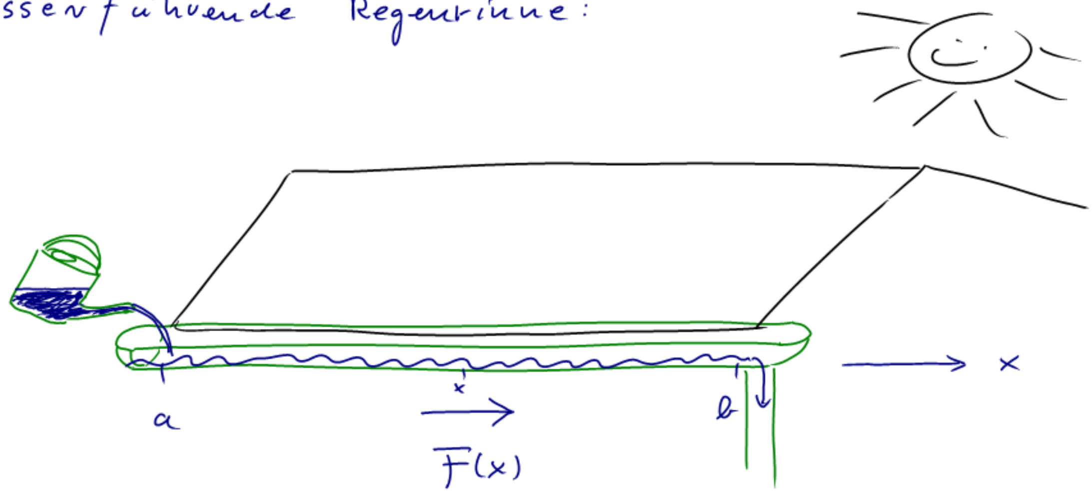
HDI:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \overset{!}{=} F(b) - F(a)} \equiv F(x)\Big|_a^b$$

(F Stammfunktion von f: $F' = f$)

statt eines formalen Beweises des HDI (→ Analysis) hier ein anschaulicher „Regenrinnenbeweis":

a) wasserführende Regenrinne:



$F(x) :=$ Volumenstrom an der Stelle x

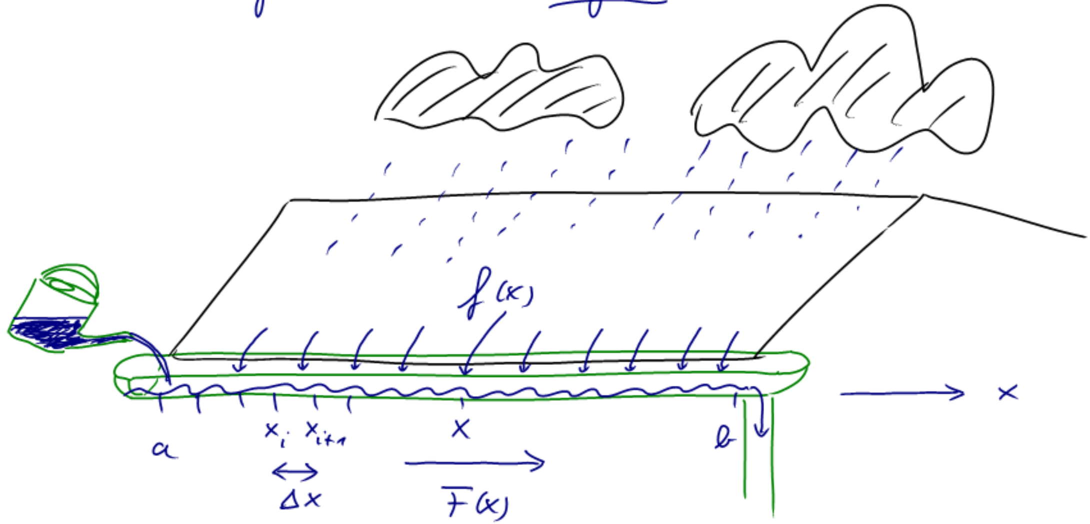
→ Volumen / Zeit

offenbar gilt:
(bei stationärem Fluss)

$$\boxed{F(b) \overset{!}{=} F(a)}$$

was bei a in die Rinne fließt, fließt bei b auch wieder 'raus!

b) wasserführende Regenrinne bei Regen:



$$f(x) := \underline{\text{Zufluss pro Strecke } \Delta x}$$

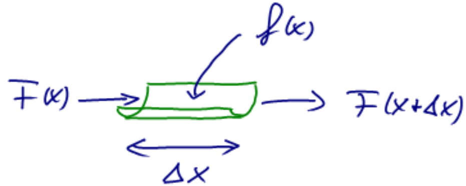
→ Zufluss zwischen x und $x + \Delta x$: $\Delta F(x) = f(x)\,\Delta x$

$$\rightarrow \quad F(b) = \underbrace{F(a)}_{\text{Gießkanne}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \Delta F(x_i)}_{\text{Dach}} = F(a) + \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x$$

→ im Grenzfall $\Delta x \to 0$:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)\,dx$$

zudem gilt:



$$F(x+\Delta x) = F(x) + f(x)\,\Delta x$$

$$\to \quad f(x) = \frac{1}{\Delta x}\left(F(x+\Delta x) - F(x) \right) \underset{\Delta x \to 0}{=} F'(x)$$

d.h. F ist Stammfunktion von f und $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Bemerkungen:

- jede (differenzierbare) Fkt f ist Stammfkt ihrer Ableitung f', deshalb

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

- mit F ist auch $F + c$ Stammfkt. von f

- sehr hilfreich beim Integrieren ist eine Liste von Stammfunktionen elementarer Funktionen:

Integrieren

f	$x^n,\ n \neq -1$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$1/x$	$\dots$
F	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dots$

Ableiten

Inte-grieren

f	$x^n,\ n \neq -1$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$1/x$	...
F	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$\ln\lvert x\rvert$	...

Ab-leiten

$\rightarrow$ z.B.:

1) $$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$ ✓

2) $$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$ ✓

3) $$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$$