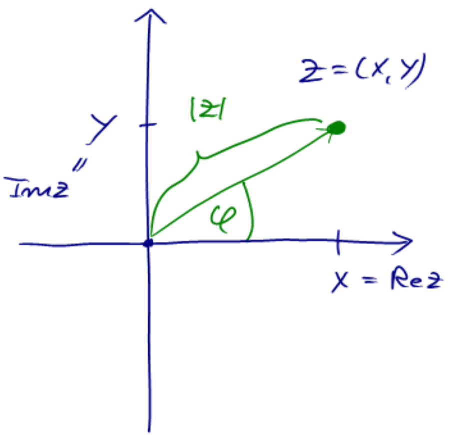
Komplexe Zahlen

<u>geometrisch</u>: <u>komplexe Zahl</u> $z \overset{!}{=}$ <u>Punkt</u> (x,y) der (reellen) zweidim. <u>Zahlenebene</u> $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$



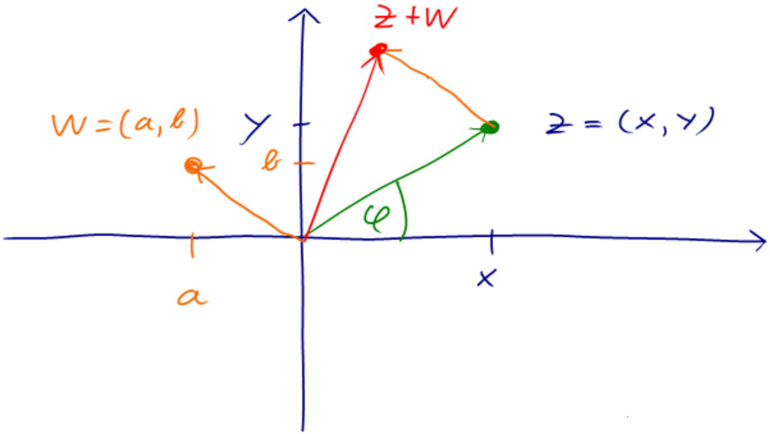
- <u>Realteil</u>: $\mathrm{Re}\, z = x$
- <u>Imaginärteil</u>: $\mathrm{Im}\, z = y$
- <u>Betrag</u>: $|z| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$
- <u>Argument</u>: $\arg z \equiv \varphi = \sphericalangle\big((1,0), z\big)$

$\rightarrow$ <u>Polardarstellung</u>: $z = (|z| \cos\varphi, |z| \sin\varphi) = |z| (\cos\varphi, \sin\varphi)$

- <u>Addition</u> $\equiv$ Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$:

$$z = (x, y), \quad w = (a, b)$$

$$\rightarrow \quad z + w = (x + a,\ y + b)$$

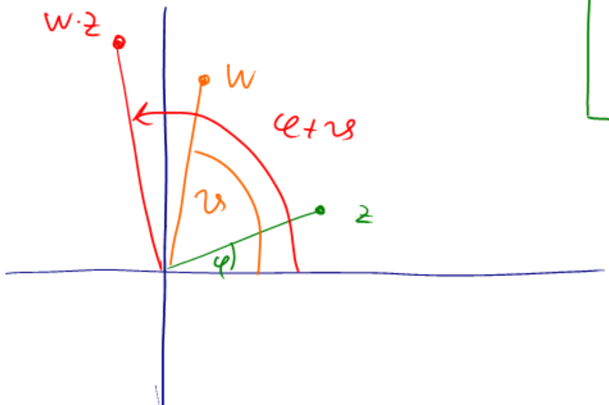


$\rightarrow$ assoziativ, kommutativ, $(0,0)$ ist neutrales Element, $(-x, -y)$ invers zu (x, y) $\Bigg\} \rightarrow$ $\boxed{(\mathbb{C}, „+") \text{ abelsche Gruppe}}$

- **Multiplikation**:

$$\underset{\underset{(a,b)}{\parallel}}{w} \cdot \underset{\underset{(x,y)}{\parallel}}{z} := (ax - by,\ ay + bx)$$

geometrische Bedeutung:



- $|wz| = |w|\,|z|$
- $\arg(wz) = \arg w + \arg z$

warum gilt $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \\ \bullet\ \arg(zw) = \arg z + \arg w \end{array}}$? $(*)$

sei $\varphi = \arg z$ und $\vartheta = \arg w$ $\rightarrow$ $z = |z| (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$w = |w| (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

Def.

$$\rightarrow \quad z \cdot w = |z| \cdot |w| \, (\underbrace{\cos\varphi \cos\vartheta - \sin\varphi \sin\vartheta}_{= \cos(\varphi + \vartheta)}, \underbrace{\cos\varphi \sin\vartheta + \sin\varphi \cos\vartheta}_{= \sin(\varphi + \vartheta)})$$

$$\text{also} \quad z\, w = \underbrace{|z|\,|w|}_{= |z\, w|} \, (\cos(\underbrace{\varphi + \vartheta}_{= \arg(zw)}), \sin(\underbrace{\varphi + \vartheta}_{= \arg(zw)}))$$

$\longrightarrow (*)$

Multiplikation offenbar:

- $\underline{\text{assoziativ}}$: $\qquad z(vw) = (zv)w$
- $(1,0)$ $\underline{\text{neutrales Element}}$: $\qquad (1,0)\,z = z$
- $z = (x,y) \neq (0,0)$ besitzt $\underline{\text{inverses}}$ $\underline{\text{Element}}$ $z^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}(x,-y)$: $\qquad z^{-1}z = (1,0)$
- $\underline{\text{kommutativ}}$: $\qquad zw = wz$

$$\rightarrow \quad \boxed{\left(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\},\ \text{„}\cdot\text{"}\right) \quad \text{abelsche Gruppe}}$$

Zusammenfassung:

1) $(\mathbb{C}, \text{„}+\text{"})$ abelsche Gruppe

2) $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \text{„}\cdot\text{"})$ abelsche Gruppe

3) es gilt das <u>Distributivgesetz</u>: $\boxed{z(v+w) = zv + zw}$

→ Menge der komplexen Zahlen mit Addition und Multiplikation $(= (\mathbb{C}, \text{„}+\text{"}, \text{„}\cdot\text{"}))$ bilden <u>Körper</u>; genau wie $(\mathbb{R}, \text{„}+\text{"}, \text{„}\cdot\text{"})$!

→ mit <u>komplexen</u> Zahlen kann man (mindestens!) genau so gut rechnen wie mit <u>reellen</u> Zahlen!

Reelle Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen, imaginäre Einheit i

komplexe Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil verhalten sich wie reelle Zahlen:

$$(x,0)+(a,0)=(x+a,0)$$

$$(x,0)(a,0)=(xa,0)$$

$\to$ identifiziere $\boxed{\underbrace{x}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(x,0)}_{\in\mathbb{C}}}$ $\to$ $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

insbesondere: $\boxed{1=(1,0)}$

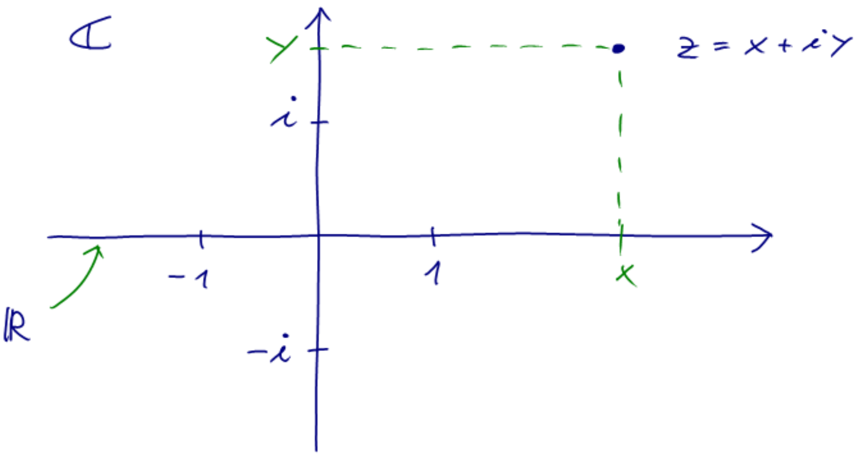
zweckmäßig: $\boxed{\boxed{i := (0,1)}}$

imaginäre Einheit

$$\boxed{1 = (1,0) \quad , \quad i = (0,1)}$$

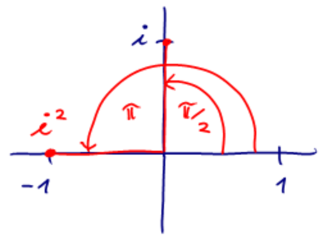
$$: \quad (x,y) = (x,0) + (0,y) = x\overbrace{(1,0)}^{1} + y\overbrace{(0,1)}^{i}$$

d.h. $$\boxed{(x,y) = x + iy}$$



$$\boxed{i = (0,1)}$$

↪ $i^2 = i\,i = (0,1)\,(0,1) = -1$



→ i ist Lösung der Gl. $z^2 = -1$,

d.h. i ist (eine) Quadratwurzel von -1 : $\boxed{i =: \sqrt{-1}}$

mittels $i^2 = -1$ und $(x,y) = x + iy$ können wir in $\mathbb{C}$ wie gewohnt rechnen:

Sei $z = x + iy$, $w = a + ib$ →

- $z + w = x + iy + a + ib = (x+a) + i(y+b)$
- $z \cdot w = (x+iy)(a+ib) = xa + ixb + iya + \underbrace{i^2}_{=-1} y b$

$$= xa - yb + i(xb + ya)$$

- Lösen quadratischer Gleichungen:

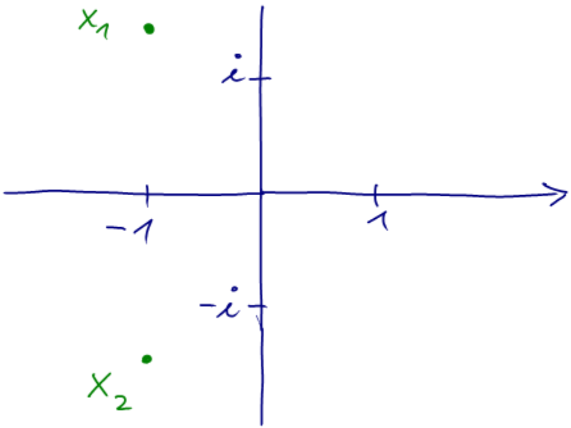
$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = -2$$

$\rightarrow$ Lösungen $\quad x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{2}$

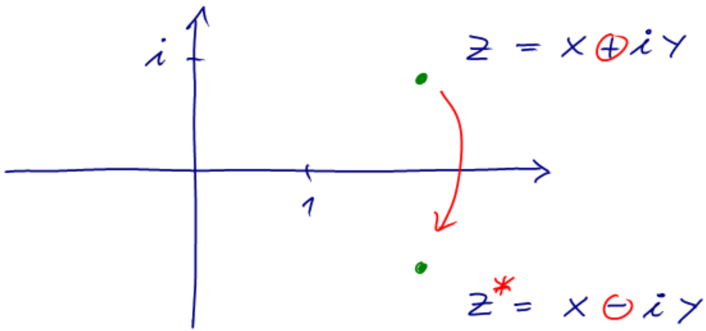
$\Rightarrow i$

$$= -1 \pm i\sqrt{2}$$



komplexe Konjugation:

geometrisch: Spiegelung an der reellen Achse:



$$z = x + iy \longrightarrow \boxed{z^* := x - iy}$$

Anwendungen: $\quad (z = x + iy)$

1) $z = z^* \iff z$ reell, d.h. $\operatorname{Im} z = 0$

$z = -z^* \iff z$ rein imaginär, d.h. $\operatorname{Re} z = 0$

2) $$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \tfrac{1}{2}(z + z^*) \\ \operatorname{Im} z &= \tfrac{1}{2i}(z - z^*) \end{aligned}}$$

$\ulcorner$ $z + z^* = x + iy + x - iy = 2x,$

$z - z^* = x + iy - x + iy = 2iy$ $\lrcorner$

3) $$\boxed{z^* z = |z|^2}$$

$\ulcorner$ $z^* z = (x - iy)(x + iy) = x^2 - i^2 y^2$

$= x^2 + y^2$ $\lrcorner$

4) $$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{|z|^2}}$$

Rechenregeln:

$$\boxed{(z + w)^* = z^* + w^*, \quad (zw)^* = z^* w^*, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}, \quad (z^*)^* = z}$$