Komplexe Funktionen: exp, sin, cos, sinh, cosh, ...

reelle Exponentialfkt.: $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Taylor

genügt $e^{a+b} \overset{!}{=} e^a \cdot e^b$

→ **komplexe Exponentialfkt.:**

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} \end{aligned}$$

Notation: $e^z \equiv \exp(z)$

genügt ebenfalls $\boxed{e^{z+w} \overset{!}{=} e^z \, e^w}$ $(z, w \in \mathbb{C})$

e^z für allgemeines $z = x + iy \in \mathbb{C}$?

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad ; \qquad e^x \checkmark \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$e^{iy} = ?$$

$$e^{iy} \equiv \exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iy)^n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2\ell)!} (iy)^{2\ell} + \frac{1}{(2\ell+1)!} (iy)^{2\ell+1} \right\}$$

mit $i^{2\ell} = (i^2)^\ell = (-1)^\ell$, $i^{2\ell+1} = i\, i^{2\ell} = i\,(-1)^\ell$ folgt:

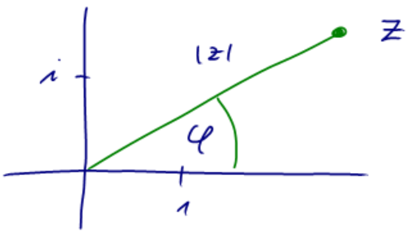
$$e^{iy} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} y^{2\ell}}_{\hat{=} \cos(y)} + i \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} y^{2\ell+1}}_{\hat{=} \sin(y)}$$

d.h. $$\boxed{e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)} \qquad y \in \mathbb{R}$$

← Euler-Identität

$$\rightsquigarrow \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad !$$

Polardarstellung mittels Exponentialfunktion:

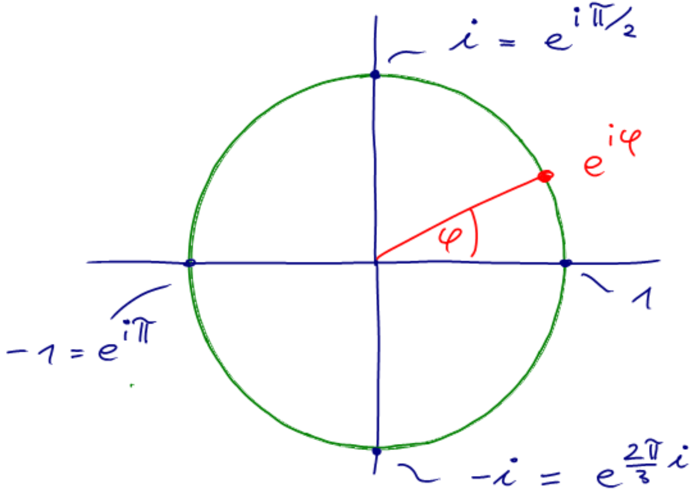


mit $\varphi = \arg z$: $z = |z| \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{= \; e^{i\varphi} \quad !}$

Euler

d.h. $$\boxed{z = |z| \, e^{i\varphi}}$$

→ komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis $\subset \mathbb{C}$:



$i = e^{i\pi/2}$

$-1 = e^{i\pi}$

$-i = e^{i\, 2\pi/3}$

u.s.w.

Euler-Id.: $\underline{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$: <u>Anwendungsbeispiele</u>:

1) <u>Additionstheoreme für sin und cos</u>:

$$\underline{\cos(\varphi+\vartheta)} + i \underline{\sin(\varphi+\vartheta)} \overset{E.I.}{=} e^{i(\varphi+\vartheta)} = e^{i\varphi} e^{i\vartheta}$$

$$\overset{E.I.}{=} (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

$$= \underbrace{\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta}_{\hat{=}\ \cos(\varphi+\vartheta)} + i(\underbrace{\sin\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta}_{\hat{=}\ \sin(\varphi+\vartheta)})$$

2) <u>n-te Einheitswurzeln</u> $\equiv$ Lösungen der Gl. $\boxed{z^n = 1}$ $n \in \mathbb{N}$ (*)

Ansatz: $\underline{z = e^{i\varphi}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $z^n = e^{i\varphi \cdot n} = \cos(n\varphi) + i \sin(\varphi n)$

$$\rightarrow \quad (*) \iff \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = 1 \iff \begin{cases} \cos(n\varphi) = 1 \\ \sin(n\varphi) = 0 \end{cases}$$

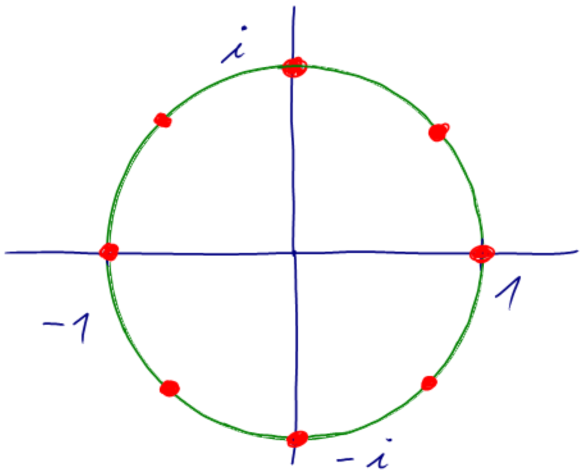
d.h. (*) genau dann erfüllt wenn $n\varphi = 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$

d.h. $\boxed{\varphi = \frac{2\pi k}{n}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{n-te E.W.} = \left\{ e^{i\frac{2\pi k}{n}} \,\middle|\, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}}$

Beispiel: 8. Einheitswurzeln $\equiv$ Lösungen von $z^8 = 1$

$$= \left\{ e^{i \pi/4 \, k} \;\middle|\; k = 0, 1, \dots, 7 \right\}$$

$$= \Big\{ 1,\ e^{i\pi/4},\ \underset{\substack{\parallel \\ i}}{e^{i\pi/2}},\ e^{i\,3\pi/4},\ \underset{\substack{\parallel \\ -1}}{e^{i\pi}},\ e^{i\,5\pi/4},\ \underset{\substack{\parallel \\ -i}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}},\ e^{i\frac{7\pi}{4}} \Big\}$$



$\mathbb{C}$

Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

mittels (komplexer) Exponentialfunktion:

wegen Euler-Id. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ offenbar:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{Re} e^{ix} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{Im} e^{ix} \end{aligned}}$$

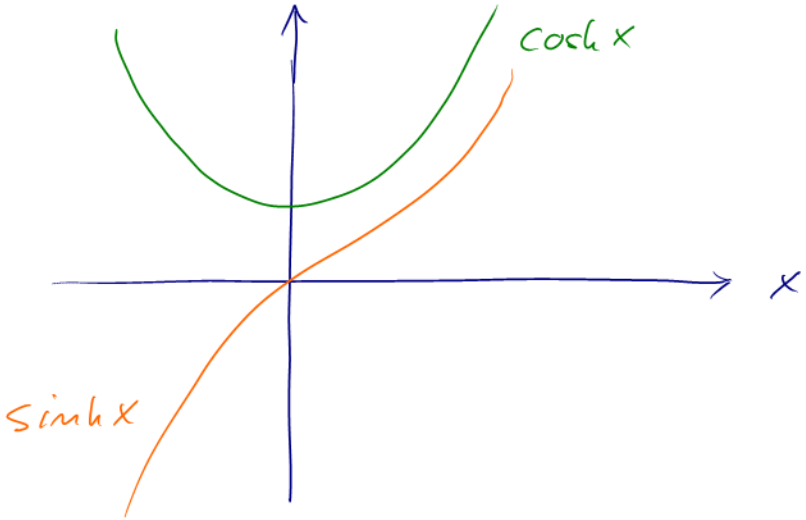
hyperbolische Funktionen:

<u>Cosinus Hyperbolicus:</u> $\cosh x := \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\quad (x \in \mathbb{C})$

<u>Sinus Hyperbolicus:</u> $\sinh x := \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$$\cosh x := \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$



Eigenschaften:

- $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
- $$\cosh' x = \sinh x, \quad \sinh' x = \cosh x$$

- $$\cosh(ix) = \cos x$$

  $$\sinh(ix) = i \sin x$$

- $$\cosh x = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

  $$\sinh x = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Tangens hyperbolicus: $\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

Cotangens hyperbolicus: $\coth := \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

Umkehrfunktionen

$\cosh^{-1} x$	$\equiv$	$\operatorname{arcosh} x$	:	Areacosinus hyperbolicus	$(x \geq 1)$
$\sinh^{-1} x$	$\equiv$	$\operatorname{arsinh} x$	:	Areasinus " "	$(x \in \mathbb{R})$
$\tanh^{-1} x$	$\equiv$	$\operatorname{artanh} x$	:	Areatangens " "	$(\lvert x \rvert < 1)$
$\coth^{-1} x$	$\equiv$	$\operatorname{arcoth} x$	:	Areacotangens " "	$(\lvert x \rvert > 1)$

mit Ableitungen:

$$\operatorname{arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1)$$

$$\operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{artanh}' x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{arcoth}' x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (|x| > 1)$$

Komplexer Logarithmus

$$\boxed{\begin{aligned} \ln : \quad \mathbb{C}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\times[0,2\pi[\ \subset \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \ln z := \ln|z| + i \arg z \end{aligned}}$$

$\rightsquigarrow$

- $e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i\arg z} = |z|\, e^{i \arg z} = z$ ✓
- $\ln e^{x+iy} = \ln(e^x e^{iy}) = x + iy$ ✓

erlaubt Def. allg. Potenzen:

$$\boxed{z^w := e^{w \ln z}} \quad \text{für } w \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Beispiele:

- $$\ln i = \ln|i| + i \arg i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

  kürzer: $i \overset{!}{=} e^{i\pi/2} \rightarrow \ln i = i\pi/2$

- $$\ln(-1) = i\pi$$

- $$\ln(-i) = i\,3\pi/2$$

- $$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$$ (reell!)

  ("alternativ": $i = e^{i\pi/2} \rightsquigarrow i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$)$^{(*)}$

- $$(-1)^i = e^{i\ln(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$$

  ("alternativ": $-1 = e^{i\pi} \rightsquigarrow (-1)^i = (e^{i\pi})^i = e^{-\pi}$)$^{(*)}$

((*) ⚠ : $i \overset{!}{=} e^{\frac{5\pi}{2}i} \rightsquigarrow i^i = e^{-5\pi/2}$??)

Ableitung einer komplexwertigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

genau wie für reellwertige Fkt. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &:= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\overset{!}{=} (\operatorname{Re} f(x))' + i (\operatorname{Im} f(x))' \end{aligned}}$$

→ • Ableitungsregeln genau wie vorher!

• höhere Ableitungen analog

Beispiele:

- $$f(t) := a\, e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\rightarrow \quad f'(t) = i \omega a\, e^{i(\omega t + \varphi)}$$

- $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}\right) = -\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} = -\left(\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon^2 - x^2 + 2i\varepsilon}{(x^2+\varepsilon^2)^2}$$

Integral einer komplexwertigen Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx}$$

- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Stammfkt zu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ g.d.w.

$$F' = f$$

d.h. $(\operatorname{Re} F)' = \operatorname{Re} f$, $(\operatorname{Im} F)' = \operatorname{Im} f$

$\rightsquigarrow$ $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(wie zuvor für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Beispiel:

- $$\int_a^b e^{ikx}\,dx = \left.\frac{e^{ikx}}{ik}\right|_a^b = \frac{1}{ik}\left(e^{ikb} - e^{ika}\right)$$

insbes. $$\int_{-b}^{b} e^{ikx} = \frac{1}{ik}\left(e^{ikb} - e^{-ikb}\right) = \frac{2}{k}\sin kb$$

[alternativ: $$\int_a^b e^{ikx} = \int_a^b (\cos kx + i\sin kx)\,dx$$

$$= \int_a^b \cos kx\,dx + i\int_a^b \sin kx\,dx = \dots$$
]