Differenzialgleichungen

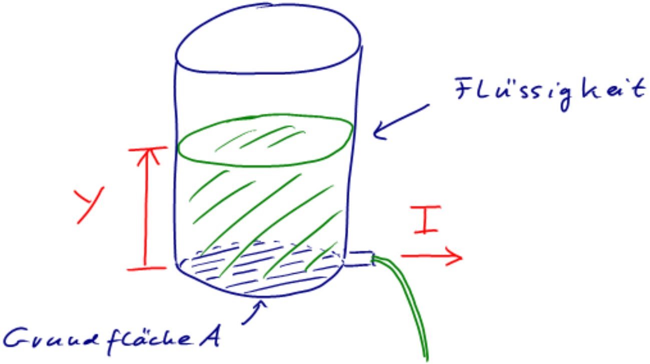
in der Physik u.a. benötigt zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines physikalischen Zustands („Dynamik“):

Mechanik: Newton-Gleichung
Quantenmechanik: Schrödinger-Gleichung
Elektrodynamik: Wellengleichung
Thermodynamik: Wärmeleitungsgleichung

↑
Differenzialgleichungen!

→ einfaches Beispiel:

auslaufender Behälter:



- **Zustand** $\equiv$ Höhe $y(t)$ des Flüssigkeitsspiegels zur Zeit t

- **Zustandsänderung** infolge auslaufender Flüssigkeit mit Volumenstrom

$$(1) \qquad I(t) = -\frac{\Delta V(t)}{\Delta t} = -\dot{V}(t) = -A\,\dot{y}(t)$$

- Strom I druckabhängig und damit Funktion der Höhe y:
  ↳ f

$$(2) \qquad I = f(y)$$

⟶

→ „Dynamik":

$$\boxed{\underline{\underline{\dot{y}(t)}} = - f(\underline{\underline{y(t)}})} \qquad (3) \qquad (A \equiv 1)$$

Zustandsänderung ↗ ↖ Zustand

Gl. (3) beinhaltet $\underline{\underline{y(t)}}$ und $\underline{\underline{\dot{y}(t)}}$ und ist damit eine Differenzialgleichung (DGL) 1. Ordnung für $y(t)$;

- eine Lösung der DGL (3) ist eine Funktion $y(t)$ derart, dass

$$\dot{y}(t) = - f(y(t)) \qquad (\text{für alle } t \in D_y)$$

- eine Lösung der DGL (3) zum Anfangswert y_0 bei $t=0$ erfüllt zudem

$$y(0) = y_0 \, .$$

beachte: i.d.R. besitzt eine DGL (unendlich) viele Lösungen, aber nur genau eine zu einem vorgegebenen Anfangswert y_0

→ Höhe $y(t)$ der Flüssigkeit durch DGL (3) ("Dynamik") und Anfangswert y_0 bei $t=0$ für alle Zeiten $t>0$ determiniert!

Wie bestimmt man Lösungen der DGL

$$\dot{y}(t) = -f(y(t))$$

?

z. B. numerisch mittels Euler-Iteration:

für hinreichend kleines $\Delta t > 0$ ist

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \underset{(3)}{\overset{!}{=}} -f(y(t))$$

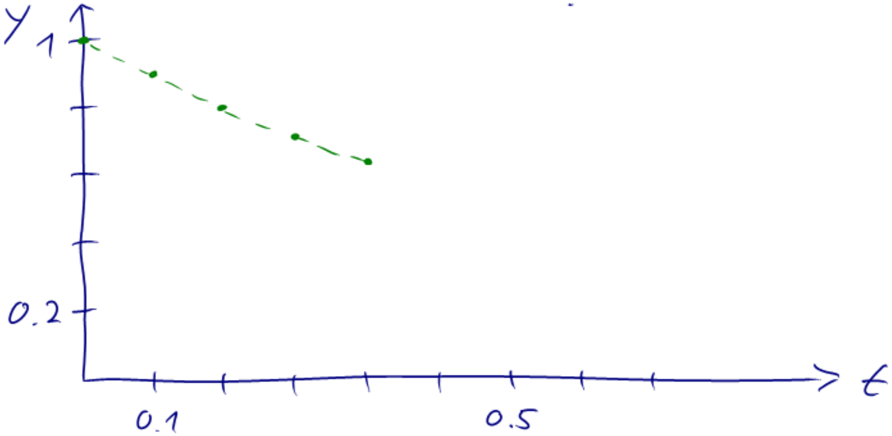
$$\to \quad \boxed{\underline{y(t)} \xrightarrow{\Delta t} y(\underline{\underline{t+\Delta t}}) = \underline{y(t)} - f(\underline{y(t)})\Delta t} \qquad (4)$$

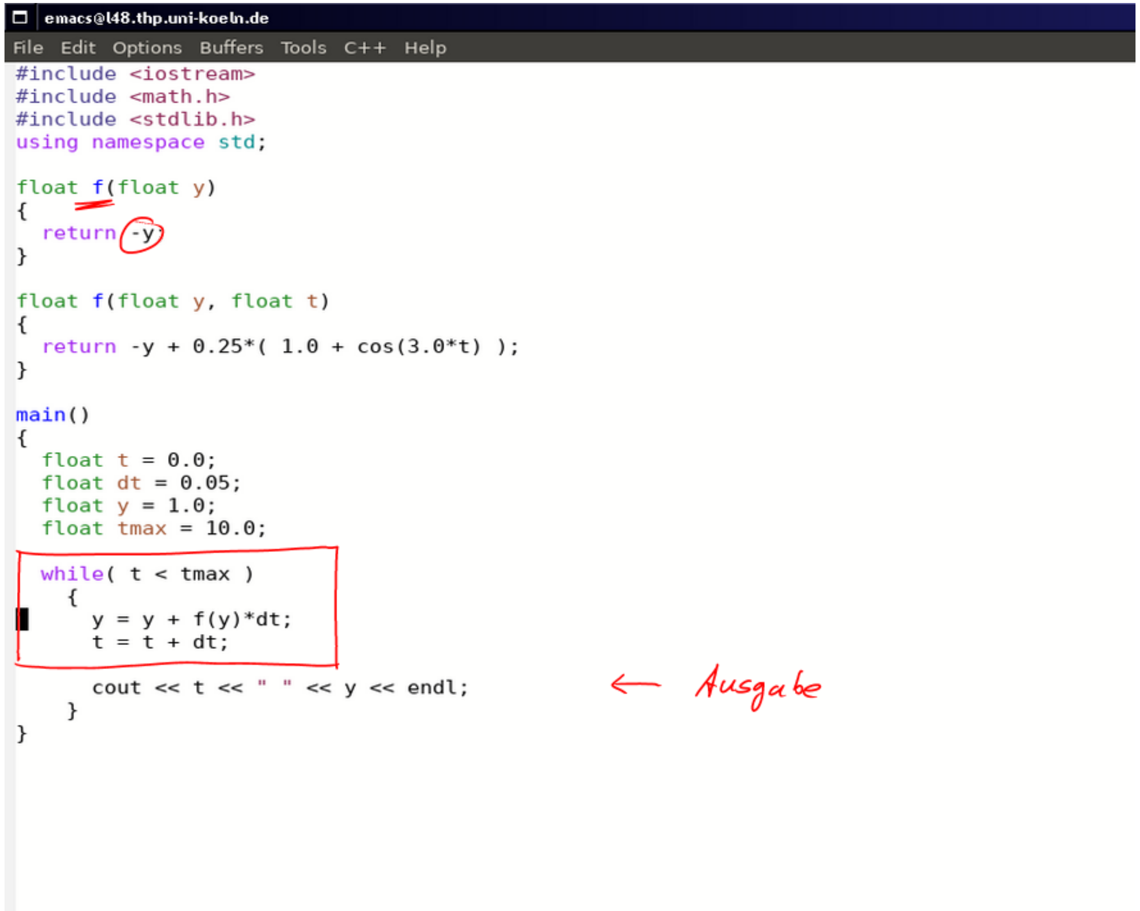
n-fache Iteration von (4) mit $\boxed{y(0) = y_0}$ ergibt Näherung für gesuchte Lösung $y(t)$ zur Zeit $t = n\Delta t$.

z.B. für $f(Y) = \beta Y$, $\beta = 1$, $\Delta t = 0.1$, $Y_0 = 1$

hochviskose Flüssigkeit (z.B. Honig)

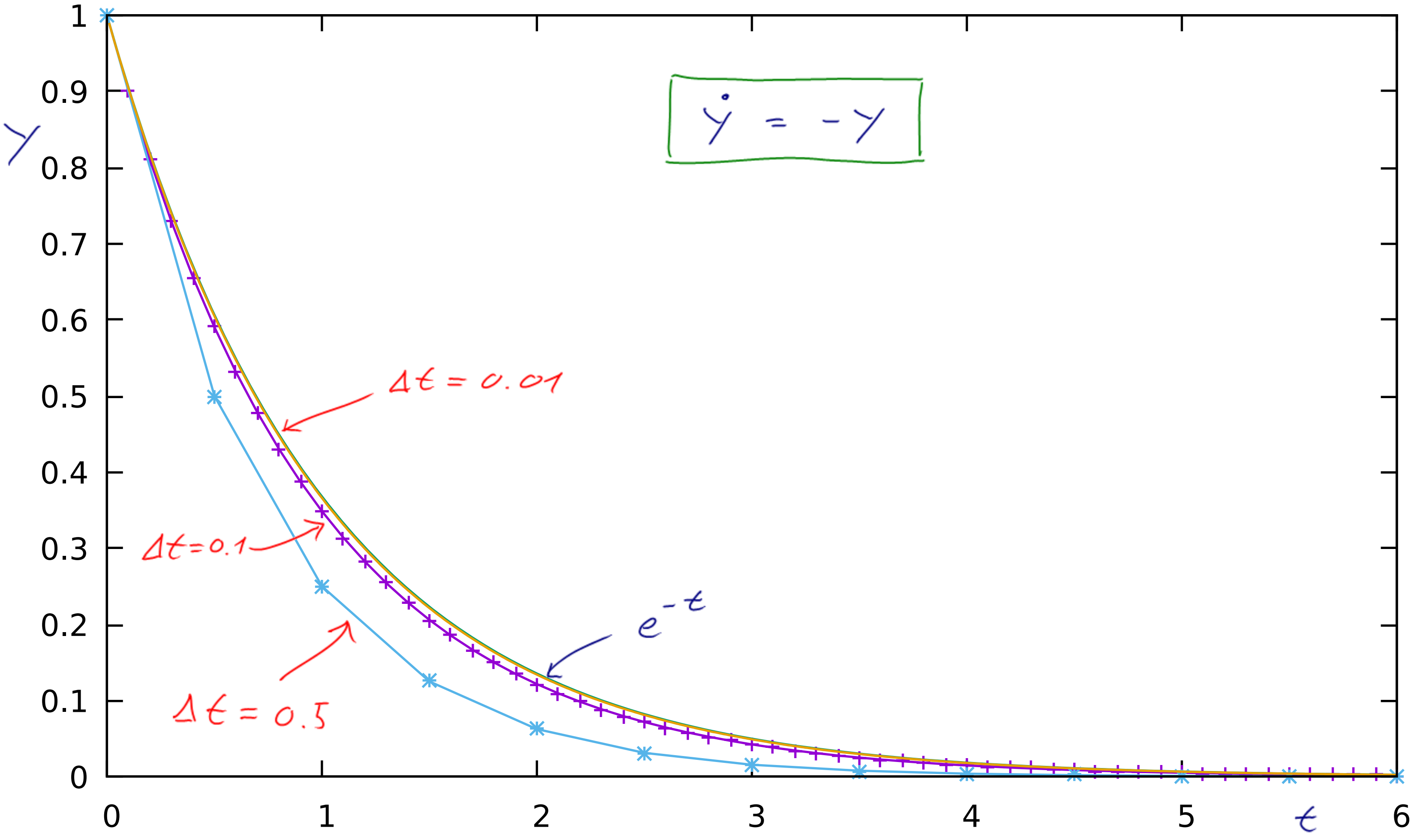
	e^{-t}
$Y(0) = 1$	1
$Y(0.1) = 1 - 0.1 = 0.9$	0.90
$Y(0.2) = 0.9 - 0.09 = 0.81$	0.82
$Y(0.3) = 0.81 - 0.08 = 0.73$	0.74
$Y(0.4) = 0.73 - 0.07 = 0.66$	0.67
$\vdots$	$\vdots$



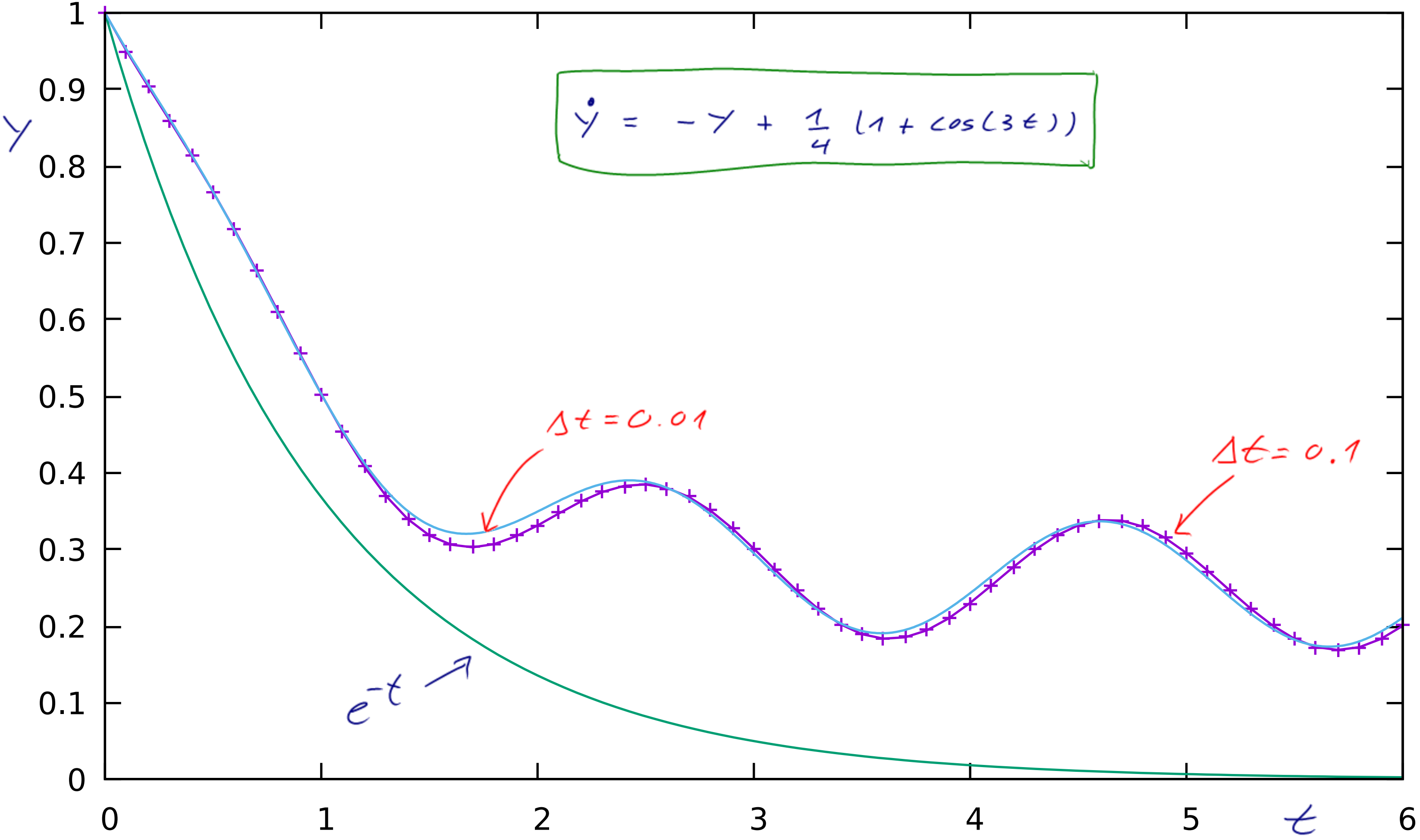


```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

float f(float y)
{
  return -y;
}

float f(float y, float t)
{
  return -y + 0.25*( 1.0 + cos(3.0*t) );
}

main()
{
  float t = 0.0;
  float dt = 0.05;
  float y = 1.0;
  float tmax = 10.0;

  while( t < tmax )
    {
      y = y + f(y)*dt;
      t = t + dt;

      cout << t << " " << y << endl;
    }
}
```

← Ausgabe



$\dot{y} = -y$
y
t
e^{-t}
$\Delta t = 0.01$
$\Delta t = 0.1$
$\Delta t = 0.5$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
1
2
3
4
5
6



$\dot{y} = -y + \frac{1}{4}(1 + \cos(3t))$
$\Delta t = 0.01$
$\Delta t = 0.1$
e^{-t}
y
t
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
1
2
3
4
5
6