Differenzialgleichungen: Lösungsverfahren

Definition

Die Funktion $y(x)$ ist spezielle Lösung der DGL

$$y' = f(y, x)$$

zum Anfangswert y_0 bei $x = x_0$ g.d.w.

(i) $y(x_0) = y_0$

(ii) $y'(x) = f(y(x), x)$ für alle $x \in D_y$.

Eine allgemeine Lösung $y_c(x)$ genügt (ii) und enthält einen freien Parameter c.

numerische Lösungen mittels Euler-Iteration:

$$\boxed{y(\underline{\underline{x+\Delta t}}) = \underline{y(x)} + f(\underline{y(x)}, x)\,\underline{\underline{\Delta t}}}$$

(Bsp. in Vrlsg. 15)

im Folgenden analytische Verfahren für spezielle Typen von DGLen:

1) „triviale" DGL: $\boxed{y' = f(x)}$

$\downarrow$

$f(\cancel{y}, x)$

$\rightarrow$ spez. Lösg. zum A.W. y_0 bei x_0:

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u)\,du}$$

$y(x_0) = y_0$ ✓

$y'(x) \underset{\uparrow \text{HDI}}{=} f(x)$ ✓

2) homogene lineare DGL:

$$\boxed{y' = g(x)\, y}$$

$\rightsquigarrow$ spez. Lsg. zum A. W. y_0 bei x_0:

$$\boxed{y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$$

$$y(x_0) = y_0\, e^{\overbrace{\int_{x_0}^{x_0} g(u)\,du}^{}} = y_0 \quad \checkmark$$

$$\underbrace{}_{\stackrel{!}{=}\,0}$$

$$y'(x) = y_0\, g(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du} = g(x)\, y(x) \quad \checkmark$$

$\uparrow$

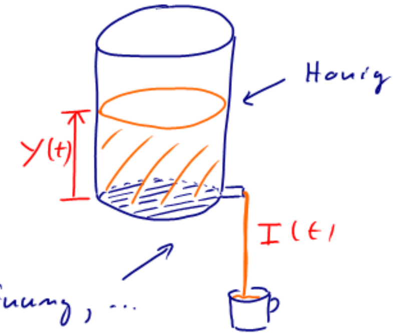
HDI

Spezialfall: $\boxed{y' = \alpha y}$ $\quad (g(x) = \alpha)$

$$\rightarrow \quad \boxed{y(x) = y_0 \, e^{\alpha (x - x_0)}}$$

Beispiele:

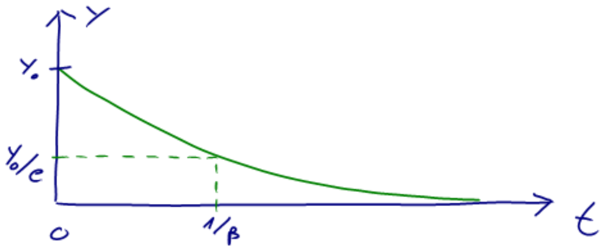
2a) auslaufender Honigbehälter:



$$\dot{y} = -\beta y$$

β bestimmt durch Viskosität des Honigs, Öffnung, ...

→ spez. Lsg. zum A.W. y_0 bei $t = 0$: $\boxed{y(t) = y_0 \, e^{-\beta t}}$



2b) auslaufender Honigbehälter mit zeitlich variablen Auslauf:

$$\Rightarrow \beta(t)$$

z. B. $\beta(t) = \beta_0 \, e^{-\gamma t}$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{y} = -\beta_0 \, e^{-\gamma t} \, y}$$

$\rightarrow$ spez. Lsg. zum A.W. y_0 bei $t=0$:

$$y(t) = y_0 \, e^{-\beta_0 \int_0^t e^{-\gamma u} du}$$

mit $\int_0^t e^{-\gamma u} du = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma u} \Big|_0^t = (1 - e^{-\gamma t})/\gamma$ also

$$\boxed{y(t) = y_0 \, e^{-\beta_0/\gamma \, (1 - e^{-\gamma t})}}$$

Test: $y(0) = y_0$ ✓, $y'(t) = -y_0 \, \beta_0 \, e^{-\gamma t} \, e^{-\beta_0/\gamma (1 - e^{-\gamma t})} = -\beta_0 \, e^{-\gamma t} y(t)$ ✓

beachte: $t \ll 1/\gamma$: $y(t) = y_0 \, e^{-\beta_0 t}$; $t \gg 1/\gamma$: $y(t) = y_0 \, e^{-\beta_0/\gamma}$ $\neq 0$.

3) inhomogene lineare DGL:

$$\boxed{y' = g(x)\,y + f(x)}$$

Inhomogenität

Lösungsstrategie:

- bestimme allgemeine Lsg. $y_c(x)$ der homogenen DGL

$$y' = g(x)\,y$$

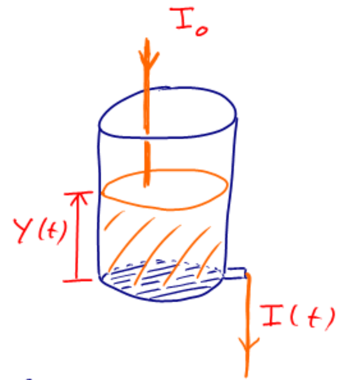
- bestimme spezielle Lsg. $y_s(x)$ der inhomogenen DGL

→ $\boxed{y = y_c + y_s}$ ist allgemeine Lsg. der inhomogenen DGL

$$\left.\begin{aligned} y_c'(x) - g(x)\,y_c(x) &\overset{!}{=} 0 \\ y_s'(x) - g(x)\,y_s(x) &\overset{!}{=} f(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (y_c+y_s)'(x) - g(x)\,(y_c+y_s)(x) \overset{!}{=} f(x)$$

Beispiel 3a): auslaufender Behälter mit konstantem Zufluss:

→ $$\boxed{\dot{Y} = -\beta Y + I_0}$$



$(A = 1)$

• allg. Lsg. der homogenen DGL $\dot{Y} = -\beta Y$:

$$Y_c(t) = c\, e^{-\beta t}$$

↑ freier Parameter

• eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist offenbar die konstante Fkt.

$$Y_s(t) = I_0/\beta$$

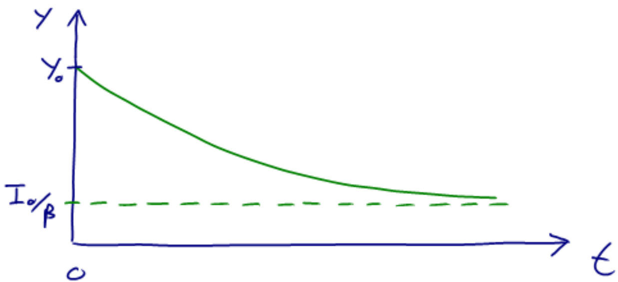
→ allg. Lsg. der inhomogenen DGL:

$$\boxed{Y(t) = Y_c(t) + Y_s(t) = c\,e^{-\beta t} + I_0/\beta}$$

→ spez. Lsg. der inhomog. DGL zum A.W. Y_0 bei $t=0$ durch geeignete Wahl des freien Parameters c:

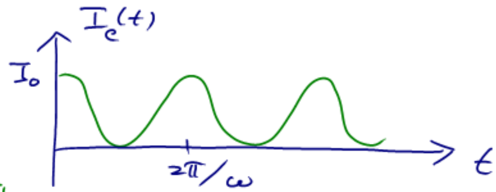
$$Y_0 \overset{!}{=} Y(0) = c + I_0/\beta \quad \rightarrow \quad c = Y_0 - I_0/\beta$$

d.h. $$Y(t) = \left(Y_0 - I_0/\beta\right) e^{-\beta t} + I_0/\beta$$

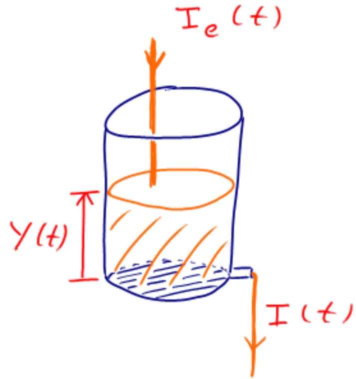


Beispiel 3b) auslauf. Beh. mit <u>zeitlich variablen Zulauf</u>

$$I_e(t) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos(\omega t)\right)$$



$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{Y} = -\beta Y + \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos(\omega t)\right)}$$



- allg. Lsg. der homogenen DGL wie zuvor in 3a) ✓

- <u>Problem</u>: Bestimmung einer <u>speziellen</u> Lsg. der <u>in</u>homogenen DGL !

$\rightarrow$ <u>Standard</u>verfahren:

4) „Variation der Konstanten":

inhomogene lin. DGL: $\boxed{y' = g(x)\,y + f(x)}$ (1)

2) $\to$ allg. Lsg. der homogenen DGL: $y_c(x) = c\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}$

Ansatz für spezielle Lsg der inhomogenen DGL:

$$y_s(x) = c(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}$$

d.h. Konstante c in $y_c(x)$ wird ersetzt durch variable Fkt. $c(x)$ $\rightsquigarrow$ „Variation der Konstanten"

$$\rightsquigarrow \quad y_s'(x) = \underline{g(x)\, y_s(x)} + \underline{c'(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$$

erfüllt DGL $\quad y' = \underline{g(x)\, y} + \underline{f(x)}$ $\quad$ g. z. w.

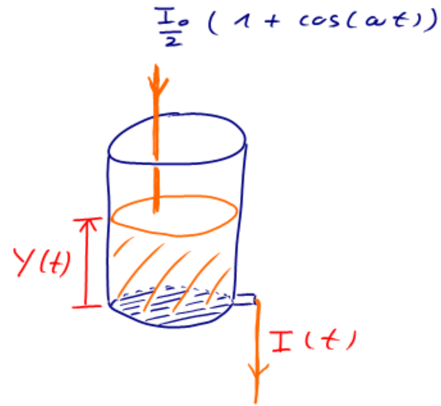
$$c'(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du} \overset{!}{=} f(x)$$

d.h. $$\boxed{c'(x) = f(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$$

triviale DGL $\xrightarrow{1)}$ $c(x) \rightsquigarrow y_s(x)$

3) $\rightsquigarrow$ allg. Lsg. $\quad y(x) = y_c(x) + y_s(x)$ ✓

zurück zu Bsp. 3b):



$$\boxed{\dot{Y} = -\beta Y + \frac{I_0}{2}(1+\cos(\omega t))}$$

$\rightsquigarrow \quad Y_c(t) = c\, e^{-\beta t}$

$\rightsquigarrow \quad \dot{c}(t) = \frac{I_0}{2}(1+\cos(\omega t))\, e^{+\beta t}$

d.h. $\quad c(t) = c_0 + \frac{I_0}{2}\int_0^t (1+\cos(\omega\tilde{t}))\, e^{+\beta\tilde{t}}\, d\tilde{t} = \dots$

vgl. Aufg. 6) Blatt 6

5) <u>separierbare DGL</u>:

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y)}$$

spezielle Lsg. zum A.W. y_0 bei $x = x_0$ bestimmt durch „<u>Trennung der Variablen</u>":

$$\boxed{\int_{y_0}^{\boxed{y(x)}} \frac{dy}{h(y)} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{\boxed{x}} g(u)\,du} \qquad (*)$$

1) $x = x_0$: $\curvearrowright$ $\displaystyle\int_{y_0}^{y(x_0)} \frac{dy}{h(y)} = 0$ $\curvearrowright$ $y(x_0) = y_0$ ✓

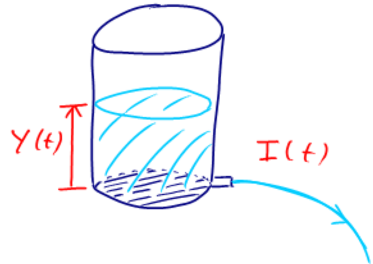
2) Ableitung von Gl $(*)$ nach x ergibt nach HDI und Kettenregel $\displaystyle\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$ ✓

Memo: $\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \xrightarrow{\text{T.d.V.}} \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$

$$\to \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$$

Beispiel 5): auslaufender Wasserbehälter

$\uparrow$ geringe Viskosität



Bernoulli $\longrightarrow$ $\boxed{\dot{y} = -\alpha\sqrt{y}}$

$\uparrow$

Separiabare DGL $\to$ Trennung der Variablen:

$$\int_{y_0}^{\boxed{y(t)}} \frac{dy}{\sqrt{y}} \overset{!}{=} -\alpha \int_0^{\boxed{t}} dt$$

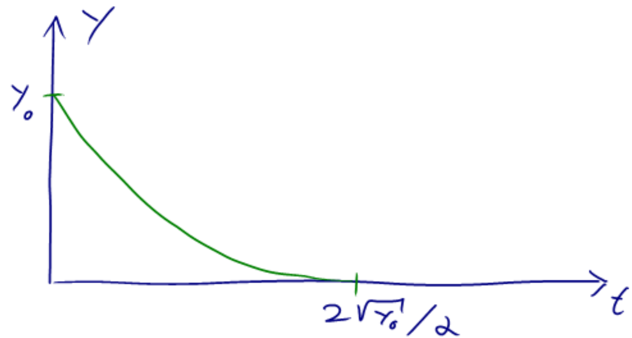
$\longrightarrow$

Trennung der Variablen:

$$\underbrace{2\sqrt{y}\,\Big|_{y_0}^{y(t)}}_{\parallel} \doteq \boxed{\int_{y_0}^{\boxed{y(t)}} \frac{dy}{\sqrt{y}} \overset{!}{=} -\alpha \int_0^{\boxed{t}} dt} \overset{!}{=} -\alpha t$$

$$2\sqrt{y(t)} - 2\sqrt{y_0}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^2}$$



$\Big\lceil$ Test: $y(0) = y_0$ ✓, $\dot{y}(t) = 2\left(\sqrt{y_0} - \frac{\alpha t}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -\alpha\sqrt{y(t)}$ $\Big\rfloor$