Differenzialgleichungen n-ter Ordnung

bisher: DGLen 1. Ordnung: $y' = f(y, x)$

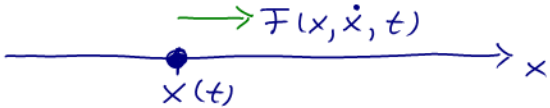
DGL n-ter Ordnung:

$$\boxed{y^{(n)} = f(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}, x)}$$

- allgemeine Lösung $y(x)$ enthält n freie Parameter
- eindeutige spezielle Lösung z. B. für vorgegebene Werte

$$y(x_0),\ y^{(1)}(x_0),\ y^{(2)}(x_0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)$$

Bsp.: Teilchen unter Kraft $F(x, \dot{x}, t)$: $\boxed{m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)}$



DGL 2. Ordnung $\rightarrow$ $x(t)$

Lösungsmethoden

numerisch mittels verallgemeinerter **Euler-Iteration:**

Anfangswerte für $y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}$ bei $x = 0$

$\rightarrow$ $y(\ell \Delta x)$ durch ℓ-fache Iteration von

$$y^{(n-1)}(x+\Delta x) = y^{(n-1)}(x) + f\left(y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), x\right)\Delta x$$

$$y^{(n-2)}(x+\Delta x) = y^{(n-2)}(x) + y^{(n-1)}(x)\,\Delta x$$

$$y^{(n-3)}(x+\Delta x) = y^{(n-3)}(x) + y^{(n-2)}(x)\,\Delta x$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y^{(1)}(x)\,\Delta x$$

Analytisches Lösungsverfahren für

homogene lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y^{(1)} + a_0\, y^{(0)} = 0} \qquad (1)$$

Exponential-Ansatz:

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x}} \qquad (2)$$

mit $y^{(\ell)}(x) = \lambda^{\ell}\, e^{\lambda x}$ führt (2) eingesetzt in (1) auf

$$\underbrace{\left(a_n\, \lambda^{n} + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \ldots + a_1\, \lambda + a_0\right)}_{\overset{!}{=}\, 0}\, \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq\, 0} \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = e^{\lambda x} \quad \text{ist Lösung der DGL} \\ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y^{(0)} = 0 \qquad (1) \\ \Longleftrightarrow \\ a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \end{array}}$$

<u>Fundamentalsatz der Algebra:</u>

Polynom $p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell z^\ell$

besitzt genau <u>n Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$</u>,

(Vielfachheiten mitgezählt)

$$\boxed{e^{\lambda_1 x}, \; e^{\lambda_2 x}, \; \dots, \; e^{\lambda_n x} \quad \text{sind Lösungen der DGL (1)}}$$

genauer:

(i) $\underline{P(z) = (\lambda_1 - z)(\lambda_2 - z)\cdots(\lambda_n - z)}$: (d.h. keine Vielfachheiten, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden)

$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n}$ sind linear unabhängige Lösungen

$\rightarrow \quad y(x) = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell e^{\lambda_\ell x}$ ist allgemeine Lösung

(ii) $P(z) = (\lambda_1 - z)\cdots(\lambda_\ell - z)^{m_\ell}\cdots(\lambda_k - z)$;

λ_ℓ Nullstelle mit Vielfachheit $m_\ell > 1$

$\rightarrow \quad e^{\lambda_\ell x}, \; x e^{\lambda_\ell x}, \; x^2 e^{\lambda_\ell x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_\ell x}$

sind linear unabhängige Lösungen (neben $e^{\lambda_j x}$, $j \neq \ell$)

$\Rightarrow$ allg. Lsg. ...

zu (ii): Warum sind im Falle $P(z) = \dots (\lambda - z)^m \dots, \quad m > 1$

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\lambda x}$$

Lösungen der DGL ?

Polynom vom Grad $n-m$

- $$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell z^\ell = P(z) \overset{!}{=} Q(z)(\lambda - z)^m$$

- $$y^{(\ell)} = \underbrace{\frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{d}{dx}}_{\ell} y = \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell y$$

$$\to \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell y^{(\ell)} = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell y = P\left(\frac{d}{dx}\right) y \overset{!}{=} Q\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\lambda - \frac{d}{dx}\right)^m y$$

etwas Nachdenken zeigt, dass $\left(\lambda - \frac{d}{dx}\right)^m x^\ell e^{\lambda x} = 0$ solange $\ell < m$; somit $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}$ Lösungen der DGL $0 = \sum_\ell a_\ell y^{(\ell)} \equiv P\left(\frac{d}{dx}\right) y$.

<u>Bemerkung</u>: für <u>reelle</u> Koeff. $a_0, a_1, \dots, a_n$ sind Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von $p(z) = \sum_{\ell} a_\ell z^\ell$ i. A. <u>komplex</u>!

$\longrightarrow$ $e^{\lambda_\ell x}$ <u>komplexe</u> Lösung?

$\longrightarrow$ <u>reelle</u> Lösungen: $\mathrm{Re}\, e^{\lambda_\ell x}$, $\mathrm{Im}\, e^{\lambda_\ell x}$!

$$\mathrm{Re}\, p(z) \underset{a_\ell \in \mathbb{R}}{=} p(\mathrm{Re}\, z)$$