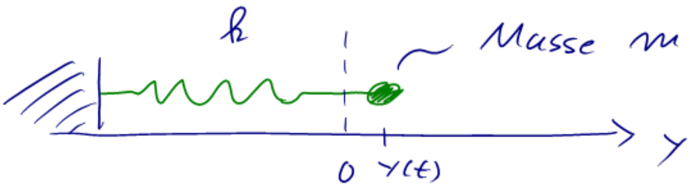
Harmonischer Oszillator mit Dämpfung



Federkraft: $F(y) = -k y$

Reibungskraft: $F_r(\dot{y}) = -\underbrace{\gamma m}_{\text{Dämpfungskoeffizient}} \dot{y}$ (Stokes)

→ **Newtonsche Bewegungsgleichung:**

$$m \ddot{y}(t) = F(y(t)) + F_r(\dot{y}(t)) = -k y(t) - \gamma m \dot{y}(t)$$

d.h. $$\boxed{\ddot{y}(t) + \gamma\,\dot{y}(t) + \frac{k}{m}\,y(t) = 0}$$

Exponential-Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ führt auf

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{k}{m} \overset{!}{=} 0$$

d.h. (quadr. Ergänzung): $$\boxed{\left(\lambda + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \overset{!}{=} \frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}}$$

Fallunterscheidung:

1) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} > 0$: starke Dämpfung

2) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} < 0$: schwache Dämpfung

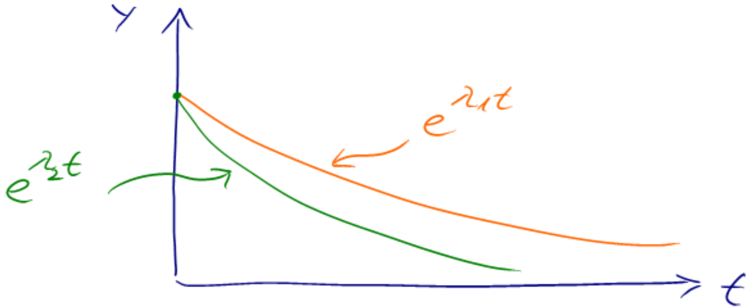
3) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} = 0$: Grenzfall

1) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} > 0$, starke Dämpfung :

$\rightarrow$ reelle Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}}$,

also $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ und $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ unabhängige Lösungen; allg. Lösung demnach

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t/2}\left(c_1 e^{+\sqrt{\cdots}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\cdots}\,t}\right)$$



2) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} < 0$, schwache Dämpfung :

$$\to \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}}_{<0}} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{(-1)\underbrace{\left(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)}_{>0}}$$

d.h. $\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}}$

mit $\omega := \sqrt{k/m - \gamma^2/4}$ also $\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$

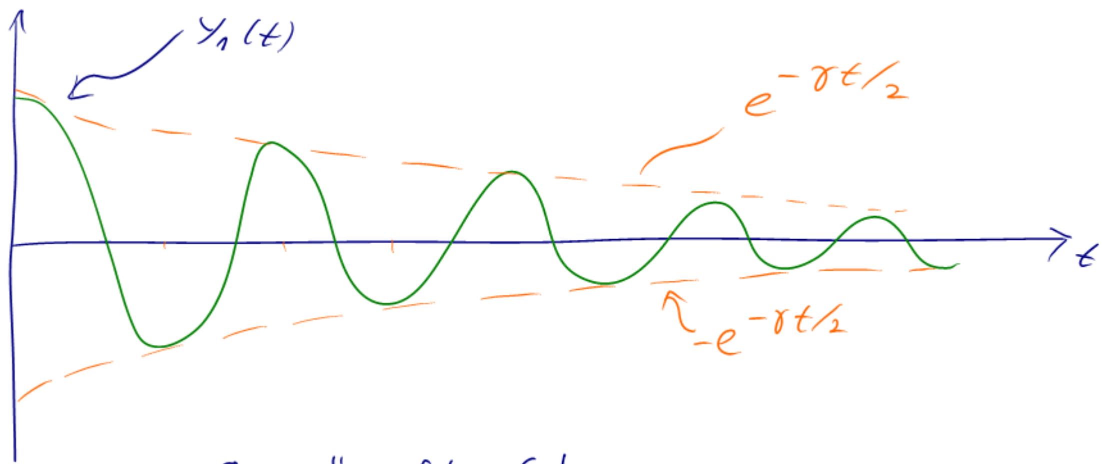
$\to$ unabhängige komplexe Losungen :

$$y_1(t) = e^{-\gamma t/2}\, e^{+i\omega t} , \quad y_2(t) = e^{-\gamma t/2}\, e^{-i\omega t}$$

$\longrightarrow$ unabhängige <u>reelle</u> Lösungen:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{y}_1(t) &= \mathrm{Re}\, y_1(t) = e^{-\gamma t/2}\cos\omega t \\ \tilde{y}_2(t) &= \mathrm{Im}\, y_1(t) = e^{-\gamma t/2}\sin\omega t\end{aligned}} \qquad (*)$$

$\rightarrow$ allg. reelle Lösung: $\quad y(t) = e^{-\gamma t/2}\left(c_1\cos\omega t + c_2 \sin\omega t\right)$



<u>gedämpfte Schwingung</u>

3) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} = 0$, <u>Grenzfall</u> : $(\lambda + \gamma/2)^2 \overset{!}{=} 0$

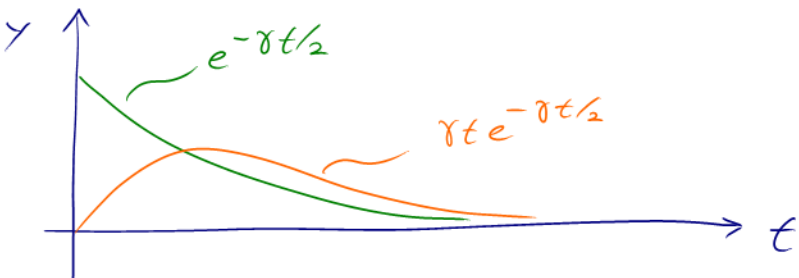
$\rightarrow$ $\lambda_1 = -\gamma/2$ ist <u>doppelte</u> Nullstelle

$\rightarrow$ unabhängige Lösungen : $y_1(t) = e^{-\gamma t/2}$

$y_2(t) = t\, e^{-\gamma t/2}$

<u>beachte</u> : für fest gewähltes t gilt für $\omega \to 0$:

aus 2)
$$\begin{cases} \tilde{y}_1(t) = e^{-\gamma t/2} \cos \omega t \;\rightarrow\; e^{-\gamma t/2} = y_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) = e^{-\gamma t/2} \sin \omega t \;\rightarrow\; \omega t\, e^{-\gamma t/2} = \omega\, y_2(t) \end{cases}$$



Harmonischer Oszillator mit Dämpfung und externer Kraft

$$F_{ex}(t) = f_0 m \cos \Omega t$$

Frequenz Ω

→ Bewegungsgleichung:

$$(*) \quad \boxed{\ddot{y}(t) + \gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = f_0 \cos \Omega t} \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Lineare DGL 2. ter Ordnung mit Inhomogenität

allgemeine Lösung wieder Summe von allg. Lsg. der homogenen und spezieller Lsg. der inhomogenen DGL dargestellt werden.

$$y(t) = y_c(t) + y_s(t)$$

- $y_c(t)$ wie zuvor ✓

- <u>Bestimmung von $y_s(t)$</u>: fasse $y_s(t)$ als <u>Realteil</u> einer speziellen Lösung $z_s(t)$ der DGL

$$\boxed{\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0 \, \underline{\underline{e^{i\Omega t}}}} \qquad (**)$$

auf (möglich, da $\gamma, \omega_0^2, f_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{Re}\, e^{i\Omega t} = \cos \Omega t$)

<u>Ansatz</u>:

$$\boxed{z_s(t) = q \, e^{i\Omega t}, \qquad q \in \mathbb{C}}$$

d.h. wir nutzen aus, dass Oszillator für $t \to \infty$ eine <u>erzwungene Schwingung</u> mit <u>externer</u> Frequenz Ω, Amplitude $|q|$ und Phasenverschiebung $-\varphi = \arg q$ ausführt.

$q \in \mathbb{C}$ bestimmt durch DGL: $z_s(t) = q\, e^{i\Omega t}$

$\hookrightarrow \dot{z}_s(t) = i\Omega q\, e^{i\Omega t}$

$\hookrightarrow \ddot{z}_s(t) = -\Omega^2 q\, e^{i\Omega t}$

eingesetzt in

$$\boxed{\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0\, e^{i\Omega t}}$$

ergibt

$$\boxed{(-\Omega^2 + i\Omega\gamma + \omega_0^2)\, \underline{q}\, e^{i\Omega t} \overset{!}{=} f_0 e^{i\Omega t}}$$

d.h.

$$\boxed{\underline{q} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma}}$$

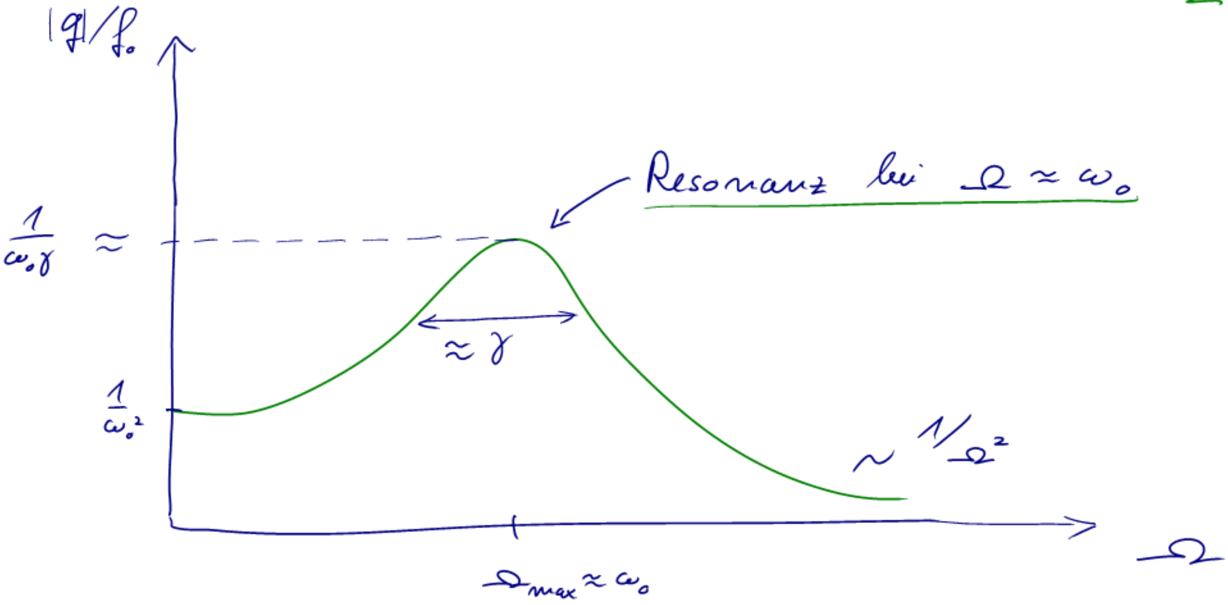
$$\Rightarrow \quad z_s(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma}\, e^{i\Omega t} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = f_0 \cos \Omega t}$$

$\longrightarrow$ <u>Amplitude</u>:

$$\boxed{|q| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 \gamma^2}}}$$

$$\left[y_s(t) = \operatorname{Re} z_s(t) = \underline{|q|} \operatorname{Re} e^{i(\Omega t - \varphi)} \right]$$



$$\boxed{\ddot{y}(t) + \gamma\,\dot{y}(t) + \omega_0^2\, y(t) = f_0 \cos \Omega t}$$

→ <u>Phasenverschiebung</u>:

$$\boxed{\varphi = -\arg q = \arctan \frac{\Omega\gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

$$y_s(t) = \operatorname{Re} z_s(t) = \operatorname{Re} |q|\, e^{-i\varphi} e^{i\Omega t}$$
$$= |q| \cos(\Omega t - \varphi)$$