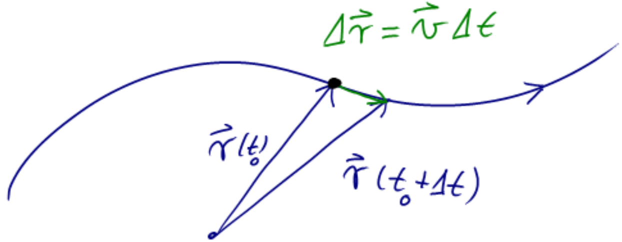
Mehrdimensionale Analysis: Ableitung vektorwertiger Fkten

Motivation: Teilchenbahn $t \longmapsto \vec{r}(t) \in V$



momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ erlaubt lineare Näherung der Bahn $\vec{r}(t)$ bei $t \approx t_0$:

$$\vec{r}(t_0+\Delta t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)\Delta t \quad (+\,\mathcal{O}(\Delta t^2))$$

d.h.

$$\boxed{\vec{v}(t_0) = \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \underset{\Delta t \to 0}{=:} \dot{\vec{r}}(t)}$$

Ableitung von $\vec{r}(t)$ nach t

allgemein:

Funktion $\vec{f}: D \to V$; $D \subset \mathbb{R}$

$x \mapsto \vec{f}(x)$; V Vektorraum

- Ableitung von $\vec{f}$ in x:

$$\boxed{\vec{f}\,'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\vec{f}(x+h) - \vec{f}(x)\right)}$$

- Ableitung von $\vec{f}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{f}\,' &: D \to V \\ & x \mapsto \vec{f}\,'(x) \end{aligned}}$$

- höhere Ableitungen von $\vec{f}$:

$$\boxed{\vec{f}^{(n+1)} := \left(\vec{f}^{(n)}\right)' \quad , \quad \vec{f}^{(0)} := \vec{f}}$$

Ableitungsregeln

1)
$$(\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$$
$$(\lambda \vec{f})' = \lambda \vec{f}'$$

(Linearität)

$\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

2)
$$(h \vec{f})' = h' \vec{f} + h \vec{f}'$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle' = \langle \vec{f}', \vec{g} \rangle + \langle \vec{f}, \vec{g}' \rangle$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})' = (\vec{f}' \times \vec{g}) + (\vec{f} \times \vec{g}')$$

3)
$$(\vec{f} \circ u)' = (\vec{f}' \circ u)\, u'$$

Ableitung in Komponenten bzgl. einer <u>konstanten Basis</u> $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

$$\to \qquad \vec{f}(x) = \sum_{l=1}^{n} f_l(x)\, \vec{e}_l = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}_B$$

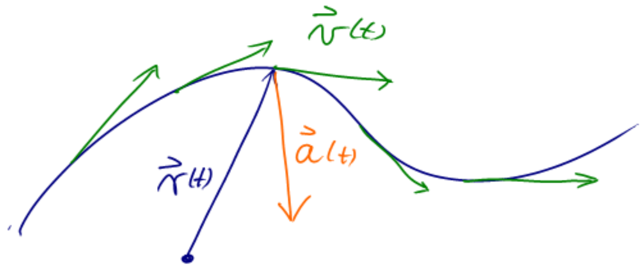
d.h. $$\vec{f} = \sum_{l=1}^{n} f_l\, \vec{e}_l = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}_B$$

$$\to \qquad \vec{f}\,' = \sum_{l=1}^{n} f_l'\, \vec{e}_l = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}_B$$

Anwendungen

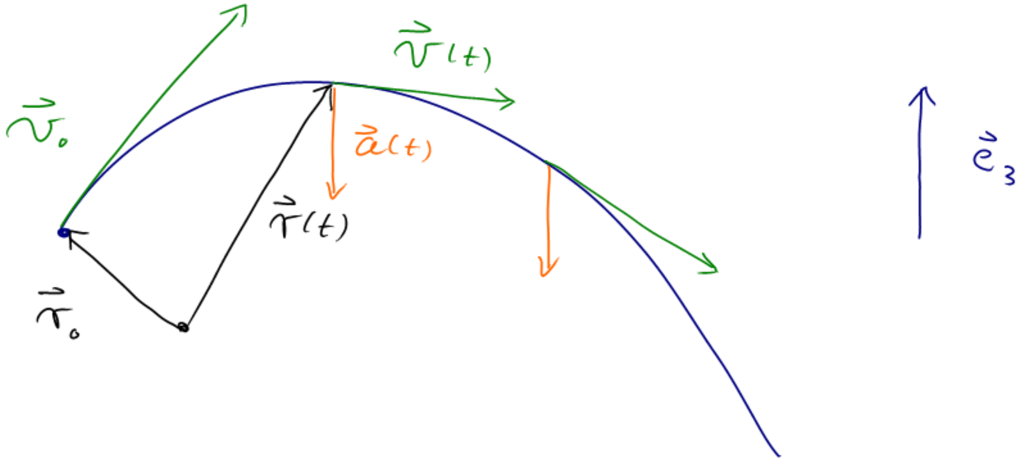
1) momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens auf Bahn $\vec{r} : [t_1, t_2] \to V$:

$$t \mapsto \vec{r}(t)$$



- <u>momentane Geschw.</u> : $\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t)$
- <u>momentane Beschleunigung</u> : $\vec{a}(t) := \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Bsp.: Wurf eines Körpers unter konst. Schwerebeschl. $\vec{g} = -g\,\vec{e}_3$

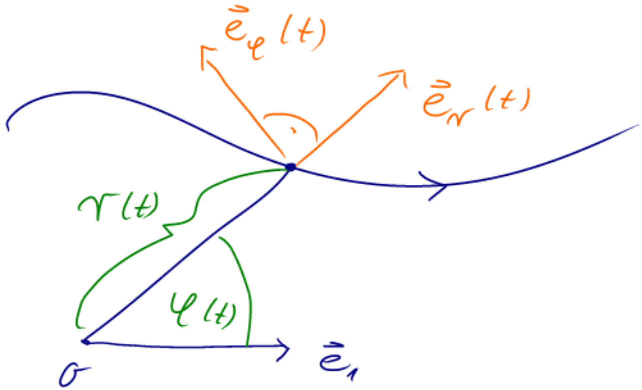


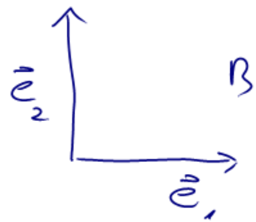
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

$$\rightarrow \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t$$

$$\rightarrow \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{g}$$

2) Teilchenbahn in der Ebene: momentane Geschw. und Beschleunigung in <u>Polarkoordinaten</u>





$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

<u>zeitabhängige</u> Polarkoordinaten: $r(t), \varphi(t)$

<u>zeitabhängige</u> ONB: $\underset{=}{\vec{e}_r}(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}_B, \quad \underset{=}{\vec{e}_\varphi}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}_B$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)}$$

benötigen $\dot{\vec{e}}_r$ und $\dot{\vec{e}}_\varphi$:

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}_B = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

d. h. :

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \quad ; \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r}$$

$$\longrightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{e}_r\right) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r \;;$$

d.h.

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_{\text{Radial-}}\,\vec{e}_r + \underbrace{r\dot{\varphi}}_{\text{Azimuthalgeschw.}}\,\vec{e}_\varphi}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r$$

d.h.

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)}_{\text{Radial-}}\vec{e}_r + \underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)}_{\text{Azimuthalbeschleunigung}}\vec{e}_\varphi}$$

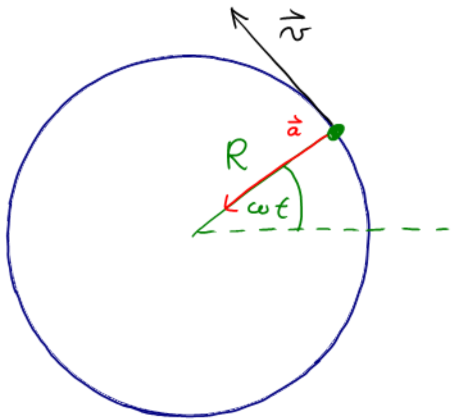
Beispiel: Massenpkt. bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf Kreisbahn mit Radius R:

$$\rightarrow \quad r(t) = R \quad \rightarrow \quad \dot{r} = 0$$

$$\varphi(t) = \omega t \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega$$

$$\rightarrow \quad \vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = R\omega\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi = -R\omega^2\vec{e}_r$$



- $\vec{v}$ tangential
- $\vec{a}$ zentripetal