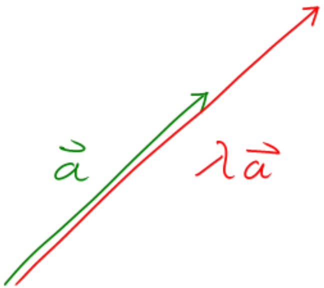
Translationen lassen sich auch strecken oder stauchen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Streckung um Faktor } \lambda > 1 \\ \text{Stauchung um Faktor } \lambda < 1\end{array}\right\} \hat{=}$$

Skalarmultiplikation von Translation $\vec{a}$ mit reeller Zahl ($\equiv$ Skalar) λ



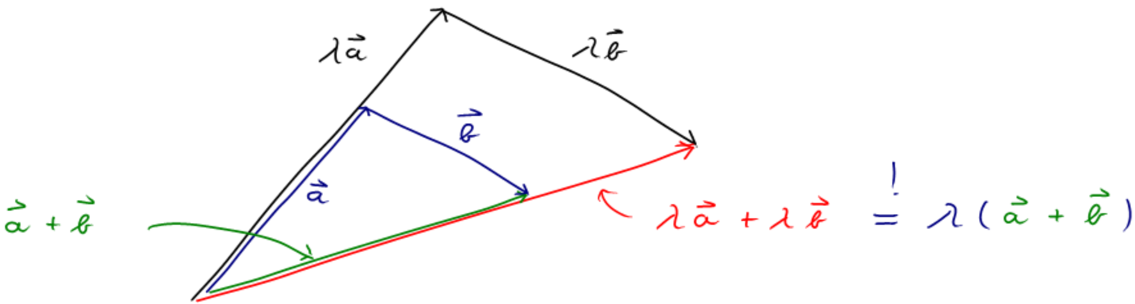
geometrisch implizierte Eigenschaften der Skalarmultiplikation:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
(S1) & \lambda(\vec{a}+\vec{b}) & = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \\
(S2) & (\lambda+\mu)\vec{a} & = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \\
(S3) & \lambda(\mu\vec{a}) & = (\lambda\mu)\vec{a} \\
(S4) & 1\,\vec{a} & = \vec{a}
\end{array}}$$

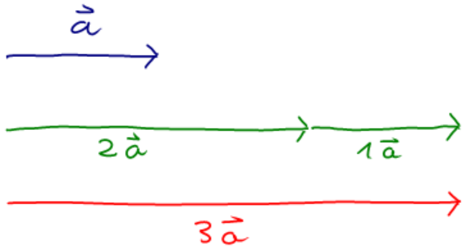
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare

$\vec{a}, \vec{b}$ Translationen

zu (S1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$:



zu (S2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$:



aus (S1) – (S4) folgen ferner:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (S5) & 0\,\vec{a} = \vec{0} \\ (S6) & (-1)\,\vec{a} = -\vec{a} \end{array}}$$

$\rightarrow$ d.h. für $\lambda < 0$: $\lambda\vec{a} = \big((-1)\cdot|\lambda|\big)\,\vec{a} \overset{(S3)}{=} |\lambda|\,(-1)\,\vec{a}$

$$= |\lambda|\,(-\vec{a})$$

zu (S5): $0\,\vec{a} = (0+0)\,\vec{a} \overset{(S2)}{=} 0\,\vec{a} + 0\,\vec{a}$

Addition von $-(0\,\vec{a})$: $\longrightarrow$ $\vec{0} = 0\,\vec{a}$.

zu (S6): $\vec{0} \overset{(S5)}{=} 0\,\vec{a} = (1-1)\,\vec{a} = \vec{a} + (-1)\,\vec{a}$

d.h. $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$.

Fazit

Das Verhalten von Translationen unter Hintereinander-ausführungen, Streckungen und Stauchungen (und Kombinationen davon) kann formal durch die Eigenschaften (A1) - A4) der Addition und den Eigenschaften (S1) - (S4) der Skalarmultiplikation erfasst werden.

"Mehrwert":

mathematische Objekte, für die es Addition und Skalar-multiplikation mit obigen Eigenschaften gibt, können wir uns (u.a.) als Translationen vorstellen und dadurch besser verstehen.

Beispiele:

- Lösungen homogener, linearer Gleichungssysteme
- Lösungen homogener, linearer Differenzialgleichungen
  → - elektromagnetische Wellen
    - Schwingungen eines mech. Systems
    - Zustände eines quantenmechanischen Systems

häufiges Auftreten der durch Addition (A1 – A4) und Skalarmultiplikation (S1 – S4) gegebenen Strukturen motiviert <u>Abstraktion</u> im Begriff des <u>Vektors</u> bzw. <u>Vektorraums</u>:

Definition (Vektor, Vektorraum)

Eine Menge V von Objekten, für die eine Addition mit Eigenschaften (A1 - A4) und eine Skalarmultiplikation mit Eigenschaften (S1 - S4) gegeben ist, nennen wir einen (reellen) **Vektorraum**; ein Element aus V nennen wir **Vektor**.

Beispiele:

- Translationen ✓

- $$V = \mathbb{R}^n := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

mit Addition und Skalarmultiplikation gemäß:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

- V = Menge der reellen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

Addition $\quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

Skalarmultiplikation $\quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

$\ulcorner$ z.B. $f(x) = x + 2x^2$, $\quad g(x) = \sin(x)$;

$\to$ Fkt. $h := 3f - 2g$ gegeben durch $h(x) = 3x + 6x^2 - 2\sin(x)$ $\lrcorner$