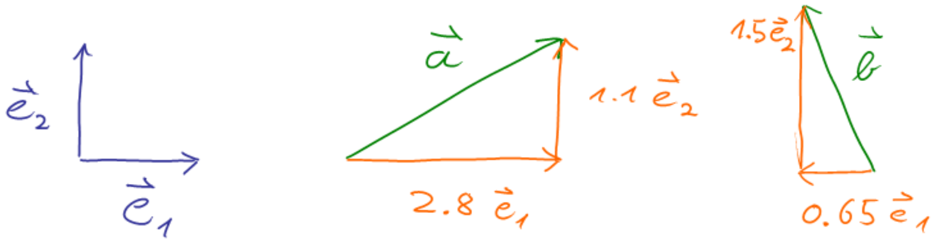
Basis, Dimension, Komponentendarstellung

Zuerst am Beispiel ebener Translationen:

- wähle <u>Basis-Translationen</u> $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,

etwa



$\rightarrow$ beliebige Translation $\vec{a}$ kann durch $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ gebildet werden:

$$\vec{a} = 2.8\,\vec{e}_1 + 1.1\,\vec{e}_2$$

$$\vec{b} = 0.65\,\vec{e}_1 + 1.5\,\vec{e}_2$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bilden Basis $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ der ebenen Translationen

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$ ← Komponentendarstellung von $\vec{a}$

Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. B

Komponentenschreibweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B := a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 .$$

Komponenten

Basis!

für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B$ erhalten wir

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B , \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B$$

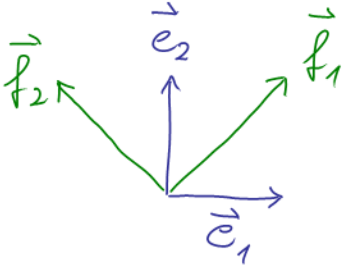
$\ulcorner$ denn $\vec{a} + \vec{b} = \underbrace{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2}_{\vec{a}} + \underbrace{b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2}_{\vec{b}}$

$$= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B ;$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda a_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B . \lrcorner$$

Vorsicht: Komponenten eines Vektors hängen immer vom gewählten Basis ab!

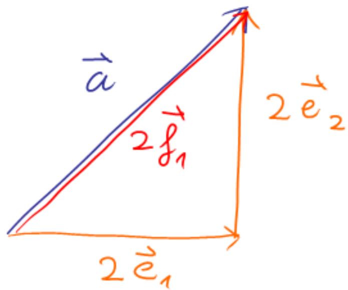
Beispiel:



$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$B' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$

$\rightarrow$



d.h. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$

allgemeiner: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}_{B'}$; $a_i \neq a_i'$

Umrechnung der Komponenten a_1, a_2 nach a_1', a_2' z.B. wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2) \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \overset{(*)}{=} \frac{a_1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2) + \frac{a_2}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\vec{f}_1 + \frac{1}{2}(-a_1 + a_2)\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \\ \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \end{pmatrix}_{B'}$$

also $a_1' = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $a_2' = \dfrac{a_2 - a_1}{2}$.

Verallgemeinerung des bisherigen für allg. Vektorräume benötigt einige neue Begriffe:

<u>Linearkombination</u>

Die <u>Linearkombination</u> der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in V$ mit Skalaren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ist der Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k \quad ;$$

im Summenschreibweise:

$$\vec{v} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{a}_l \quad .$$

Lineare Unabhängigkeit

Ein System von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ ist linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur durch die triviale Linearkombination

$$0\,\vec{a}_1 + 0\,\vec{a}_2 + \cdots + 0\,\vec{a}_k \qquad (\text{d.h. alle } \lambda_i = 0)$$

bilden lässt; andernfalls ist das System linear abhängig.

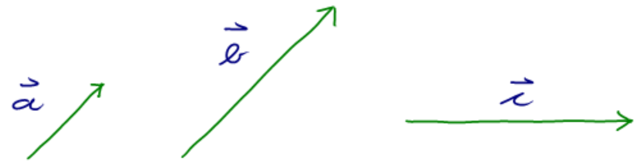
Vollständigkeit

Ein System von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in V$ ist vollständig (auch: ist ein Erzeugendensystem), wenn jeder Vektor $\vec{v} \in V$ durch Linearkombination der $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k$ gebildet werden kann, d.h.

$$\vec{v} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{a}_l \quad \left(= \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{a}_k \right)$$

für geeignete $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit am Beispiel von Translationen in der Ebene:



$(\vec{b} = 2\vec{a})$

- System $(\vec{a}, \vec{b})$ ist <u>linear abhängig</u> (da $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$) und <u>unvollständig</u> ($\vec{c}$ kann <u>nicht</u> durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden)

- System $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ist <u>linear abhängig</u> (da $2\vec{a} - \vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$) und <u>vollständig</u> (jede ebene Transl. kann durch $\vec{a}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden)

- System $(\vec{a}, \vec{c})$ ist <u>vollständig</u> und <u>linear unabhängig</u> ($\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$)

Basis:

Eine Basis eines Vektorraums V ist ein linear unabhängiges und zugleich vollständiges System von Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k \in V$.

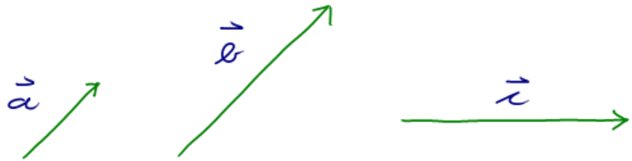
Die Komponenten eines Vektors $\vec{a} \in V$ bzgl. der Basis $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ sind die eindeutig bestimmten Skalare $a_1, a_2, \dots a_k$ der Linearkombination

$$\vec{a} = \sum_{l=1}^{k} a_l \vec{b}_l \quad \left(= a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + \dots + a_k \vec{b}_k \right) ;$$

in Komponentenschreibweise:

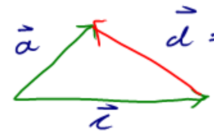
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}_B$$

als Beispiel wieder die ebenen Translationen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wie oben:



$(\vec{b} = 2\vec{a})$

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ist keine Basis (zwar vollständig, aber lin. abhängig)
- $(\vec{a})$ ist keine Basis (linear unabhängig, aber nicht vollständig)
- $B = (\vec{a}, \vec{c})$ ist Basis (des Vektorraums der ebenen Translationen)
  (linear unabhängig und vollständig)
- $B' = (\vec{b}, \vec{c})$ ist ebenfalls Basis (...)



$\vec{d} = \vec{a} - \vec{c}$

z.B.: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}_{B'}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix}_{B'}$.

Satz

Je zwei Basen eines Vektorraums V besitzen dieselbe Anzahl an Basisvektoren, genannt die Dimension des Vektorraums V.

[Beweis des Satzes z.B. in G. Fischer, Lineare Algebra]

Dimension eines Vektorraums = Anzahl der Basisvektoren