

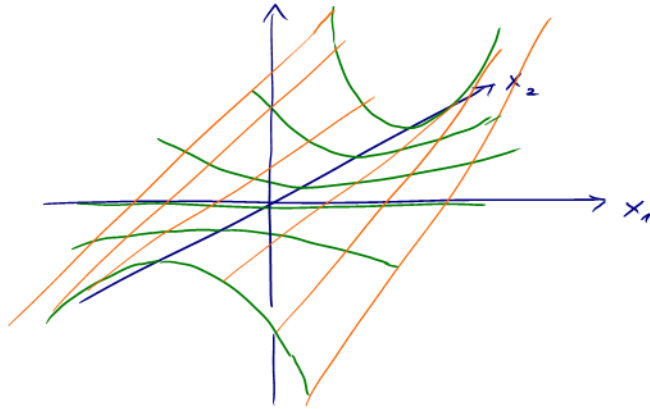
Partielle Ableitung und Gradient einer Funktion in n Variablen

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad (\rightarrow \underline{C}, \underline{V} \text{ analog})$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$

z.B. $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ (oder $f(x, y) = x^2 y$)



partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach x_e in \vec{x} :

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_e} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_1, \dots, \underline{x_e+h}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, \underline{x_e}, \dots, x_n))$$
$$= \frac{d}{dh} f(\vec{x} + h\vec{e}_e) \Big|_{h=0}$$

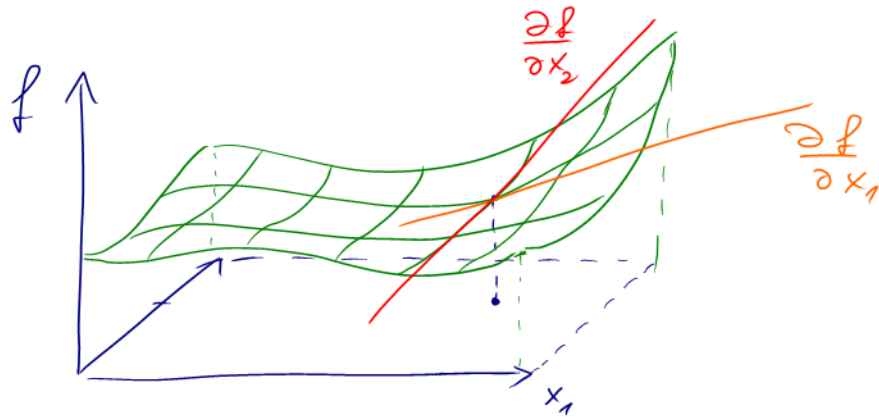
"Richtungsableitung nach \vec{e}_e "

e te Stelle



$$\vec{e}_e = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

geometrisch:



Beispiele

$$1) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = 2x_1 x_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) = x_1^2$$

$$2) \quad \text{Betragsfunktion:} \quad \vec{x} \mapsto |\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x_e} = \frac{1}{2\sqrt{\sum_i x_i^2}} \cdot 2x_e = \frac{x_e}{|\vec{x}|}$$

$$3) \quad f(\vec{x}) = h(|\vec{x}|) \quad ; \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_e}(\vec{x}) = h'(|\vec{x}|) \cdot \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x_e} = h'(|\vec{x}|) \frac{x_e}{|\vec{x}|}$$

Lineare Näherung von $f(\vec{x})$ in \vec{x} :

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{h}) &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \\ &= f(\vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) h_n \end{aligned}$$

d.h. $\boxed{f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\vec{x}) h_\ell} + \mathcal{O}(h^2)$

Definition: Gradient von $f(\vec{x})$ in \vec{x} :

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{x}) := \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\vec{x}) \vec{e}_\ell = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) \in \mathbb{R}^n}$$

$\rightarrow \boxed{f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{h} \rangle} + \mathcal{O}(h^2)$

Notation mittels Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} f(x) \end{pmatrix} \equiv \text{grad } f(\vec{x})$$

Beispiele

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 \rightarrow \text{grad } f(\vec{x}) = (2x_1 x_2, x_1^2)$

2) $\text{grad } |\vec{x}| = (x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{1}{|\vec{x}|} = \hat{x}$

3) $\text{grad } h(|\vec{x}|) = h'(|\vec{x}|) \hat{x}$

allg. Eigenschaften des Gradienten

- 1) $\text{grad } f(\vec{x})$ zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f in \vec{x}
- 2) $\text{grad } f(\vec{x})$ steht senkrecht zu Niveau-Hyperflächen von f
- 3) $\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \langle \text{grad } f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle$

z.z. 1): $\langle \text{grad } f(\vec{x}), \hat{h} \rangle$ maximal wenn $\hat{h} \parallel \text{grad } f(\vec{x})$ ✓

$$\begin{aligned}
\text{zu 3)} : \quad \frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) &= \frac{1}{\Delta t} \left(\underbrace{f(\vec{x}(t+\Delta t)) - f(\vec{x}(t))}_{= \vec{x}(t) + \dot{\vec{x}}(t) \Delta t} \right) \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left(f(\vec{x}(t)) + \langle \text{grad } f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \Delta t \rangle - f(\vec{x}(t)) \right) \\
&= \langle \text{grad } f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle
\end{aligned}$$

zu 2) Niveau-Hyperfläche $N_c := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \stackrel{!}{=} c \}$

Sei $\vec{x}(t)$ Bahn in N_c , d.h. $f(\vec{x}(t)) = c$

$$\begin{aligned}
\rightarrow 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) \stackrel{3)}{=} \langle \text{grad } f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle \\
&\quad \uparrow \\
&\quad \text{tangential zu } N_c!
\end{aligned}$$

da $\vec{x}(t) \in N_c$ beliebig folgt, dass $\text{grad } f(\vec{x})$ senkrecht zu N_c

Zweite partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach x_i und x_j in \vec{x} :

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \right)$$

für hinreichend glatte Funktionen
(S. v. Schwarz, vgl. Ana II)

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} \equiv \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (2x_1 x_2) = 2x_2, \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2) = 2x_1$$

$$\uparrow \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 x_2) \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (2x_1 x_2) = 2x_1 \quad \checkmark \quad _$$

Höhere partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^{m+1} f(\vec{x})}{\partial x_{e_1} \dots \partial x_{e_m} \partial x_{e_{m+1}}} := \frac{\partial}{\partial x_{e_{m+1}}} \left(\frac{\partial^m f(\vec{x})}{\partial x_{e_1} \dots \partial x_{e_m}} \right)$$

Anwendung:

Taylor-Entwicklung von $f(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{h}) &= f(\vec{x}) + \sum_{e=1}^m \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_e} h_e + \frac{1}{2!} \sum_{e_1, e_2=1}^m \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_{e_1} \partial x_{e_2}} h_{e_1} h_{e_2} \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{e_1, e_2, e_3=1}^m \frac{\partial^3 f(\vec{x})}{\partial x_{e_1} \partial x_{e_2} \partial x_{e_3}} h_{e_1} h_{e_2} h_{e_3} + \dots \end{aligned}$$