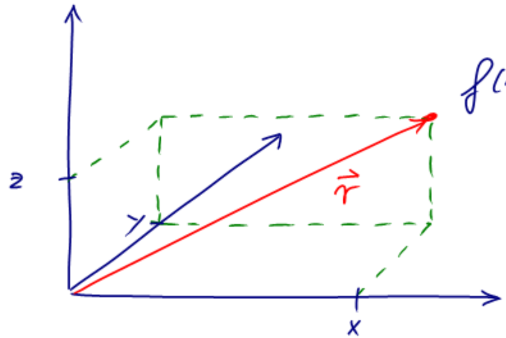
Skalarfeld, Vektorfeld, Potenzial, konservatives Vektorfeld

Skalarfeld f $\hat{=}$ ortsabhängige skalare Größe f

(z.B. Druck, Temperatur, Massendichte, Ladungsdichte)



$f(\vec{r})$ = Größe f am Ort mit kartesischen Koordinaten

$\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\text{Skalarfeld } f = \text{Abb. } f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{r} & \longmapsto & f(\vec{r}) \end{array}}$$

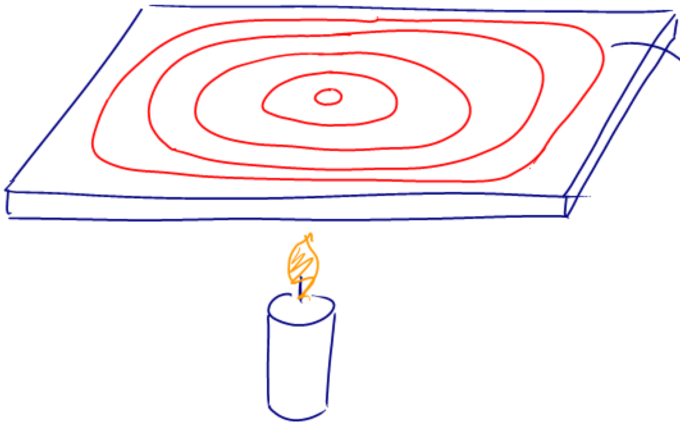
Beispiele:

- Massendichte ρ und Druck p im inneren eines Planeten/Sterns:

$$\rho(\vec{r}) = ?$$

$$p(\vec{r}) = ?$$

- Temperatur T in einer Metallplatte:

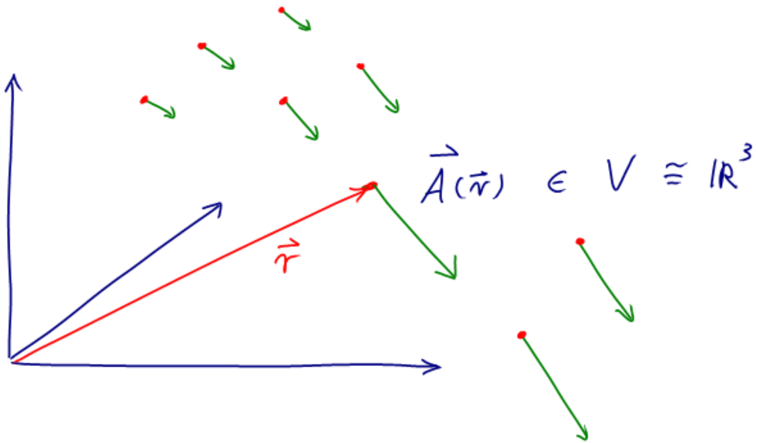


$T = $ konst.

$$T(\vec{r}) = ?$$

Vektorfeld $\vec{A}$ $\hat{=}$ **ortsabhängige vektorielle** Größe $\vec{A}$

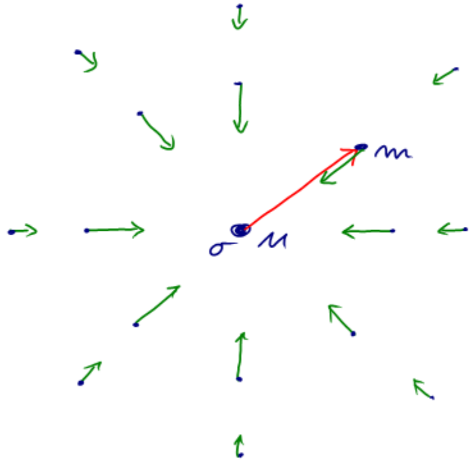
(z.B. Gravitationskraft, elektrisches Feld, Wärmestromdichte, Massenstromdichte)



$$\boxed{\underline{\text{Vektorfeld}}\ \vec{A} \;=\; \text{Abb. } \vec{A}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} & \longmapsto & \vec{A}(\vec{r}) \end{array}}$$

Beispiele:

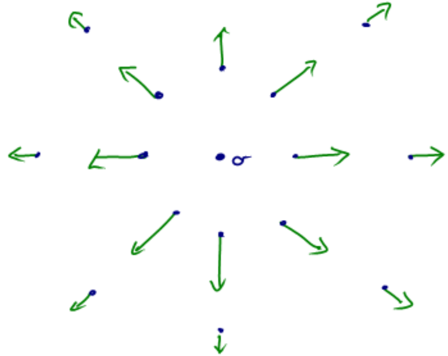
- Gravitationskraft einer Punktmasse M in O auf Punktmasse m bei $\vec{r}$:



$$\vec{F}(\vec{r}) = -\,G\,m\,M\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

$$(\,r = |\vec{r}|\,)$$

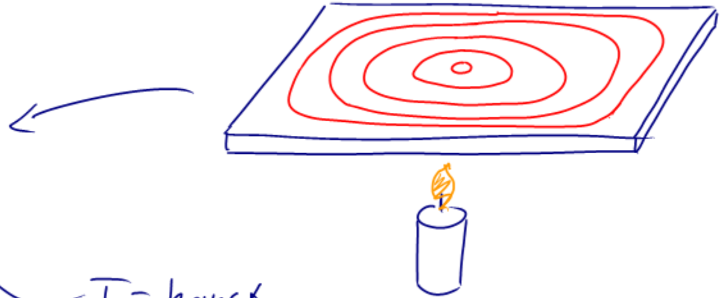
- elektrisches Feld einer Punktladung q in O:

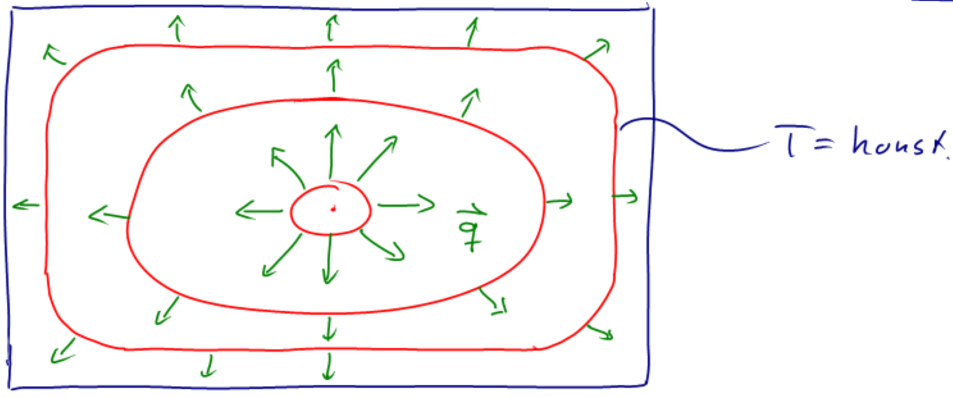


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

$$(\,r = |\vec{r}|\,)$$

• Wärmestromdichte $\vec{q}(\vec{r})$ in Metallplatte:





Wärmeleitungsgesetz (Fourier):

$$\boxed{\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T}$$

λ: Wärmeleitfähigkeit

Wärme strömt in Richtung des stärksten Temperaturabfalls!

Wärmeleitungsgesetz:

Skalarfeld

$$\vec{q} = -\lambda \, \underline{\text{grad}} \, T$$

Vektorfeld

→ <u>Gradientenbildung</u> ergibt <u>Vektorfeld</u> anhand eines <u>Skalarfelds</u>:

$$\boxed{f \xrightarrow{\text{grad}} \vec{A} = \text{grad}\, f}$$

Definition: <u>Potenzial eines Vektorfelds</u>

<u>Skalarfeld</u> Φ ist <u>Potenzial</u> des <u>Vektorfelds</u> $\vec{A}$

g. d. w.

$$\vec{A} \overset{!}{=} -\operatorname{grad} \Phi$$

<u>Beispiele</u>:

- λT ist Potenzial der Wärmestromdichte $\vec{q}$

  $\ulcorner$ denn $\vec{q} = -\operatorname{grad}(\lambda T)$ ✓ $\lrcorner$

- $U(\vec{r}) = -GmM\frac{1}{r}$ ist Potenzial der Gravitationskraft

  $\vec{F}(\vec{r}) = -GmM\frac{1}{r^2}\hat{r}$

  $\ulcorner$ denn $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \rightsquigarrow \vec{F} = -\operatorname{grad} U$ $\lrcorner$

Def.: <u>Konservatives Vektorfeld</u>

$$\boxed{\text{Ein Vektorfeld ist \underline{konservativ} g.d.w. es ein Potenzial besitzt.}}$$

[Mechanik: die Gesamtenergie eines Teilchens in einem <u>konservativen</u> Kraftfeld ist konstant, d.h. <u>konserviert</u>.]

$\rightarrow$ demnach Wärmestromdichte $\vec{q}$ und Grav.kraft $-GmM\frac{\hat{r}}{r^2}$ <u>konservativ</u>!