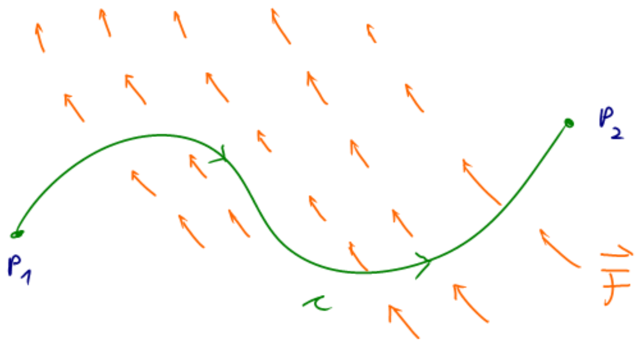
Weg und Wegintegral

Motivation: Teilchen werde im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ von P_1 nach P_2 längs Weg c bewegt:



a) Welche Strecke $s =$ „$\int_c dl$" legt das Teilchen auf dem Weg c zurück?

b) Welche Arbeit $W = -$ „$\int_c \vec{F}\, dl$" wird dabei verrichtet?

→ zu klären:

- Beschreibung eines Wegs mittels <u>Parametrisierungen</u>

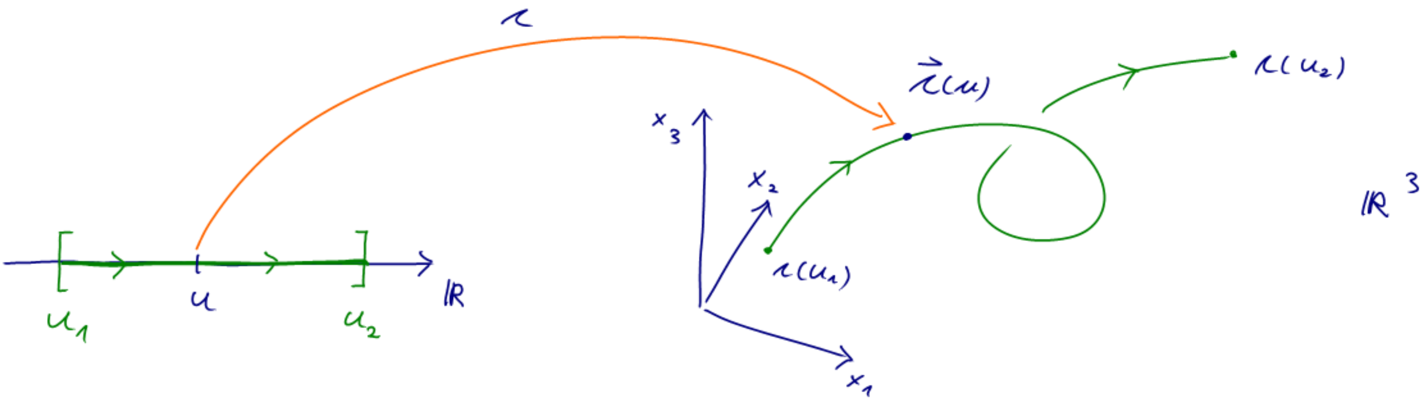
- Definition der <u>Wegintegrale</u>

$$\int_c f \, dl \quad , \quad \int_c \vec{A} \, d\vec{l}$$

Skalar- Vektorfeld

Parametrisierung des Wegs c

$$\equiv \quad \underline{\text{Abbildung}} \quad c : [u_1, u_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$u \longmapsto \vec{c}(u)$$

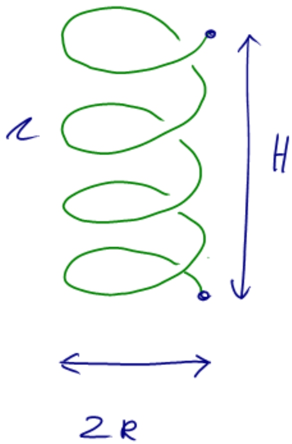


beachte: Parametrisierungen <u>nicht</u> eindeutig:

$$g : [v_1, v_2] \longrightarrow [u_1, u_2] \quad \text{bijektiv}, \quad g(v_1) = u_1, \quad g(v_2) = u_2$$

$\longrightarrow$ c und $c \circ g$ parametrisieren <u>denselben</u> Weg

<u>Beispiel</u>: Schraubenweg mit n Windungen, Höhe H, Radius R



$$c : [0, 2\pi n] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

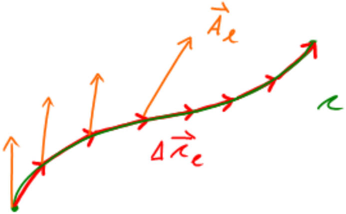
$$u \longmapsto \vec{c}(u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ \frac{H}{2\pi n} u \end{pmatrix}$$

• Umparametrisierung mittels $g : [0,1] \to [0, 2\pi n]$, $v \mapsto 2\pi n v$:

$$c \circ g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

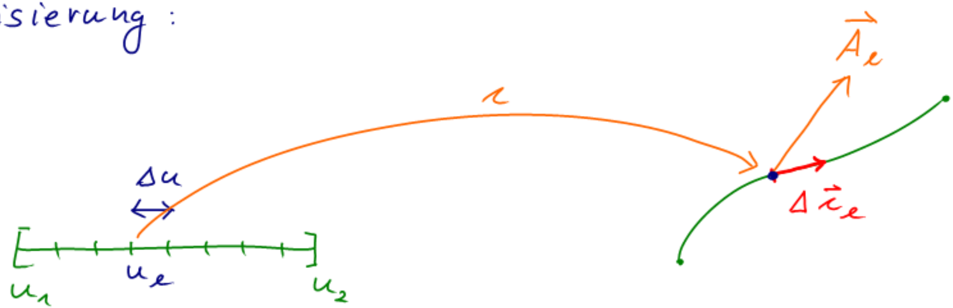
$$v \longmapsto c\circ g(v) = \begin{pmatrix} R\cos(2\pi n v) \\ R\sin(2\pi n v) \\ H v \end{pmatrix}$$

Wegintegral von $\vec{A}$ längs Weg r :



$$\int_r \vec{A}\, d\vec{r} := \lim_{|\Delta \vec{r}| \to 0} \sum_{\ell=1}^{n} \langle \vec{A}_\ell , \Delta \vec{r}_\ell \rangle$$

mittels Parametrisierung :



- $\Delta \vec{r}_\ell = \vec{r}(u_\ell + \Delta u) - \vec{r}(u_\ell) \underset{\Delta u \to 0}{=} \dfrac{d\vec{r}}{du}(u_\ell) \cdot \Delta u$

- $\vec{A}_\ell = \vec{A}(\vec{r}(u_\ell))$

$\longrightarrow$

$$\int_c \vec{A}\, d\vec{l} = \lim_{\Delta u \to 0} \sum_{l=1}^{n} \left\langle \vec{A}(\vec{r}(u_l)), \frac{d\vec{r}}{du}(u_l) \right\rangle \Delta u$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left\langle \vec{A}(\vec{r}(u)), \frac{d\vec{r}}{du}(u) \right\rangle du$$

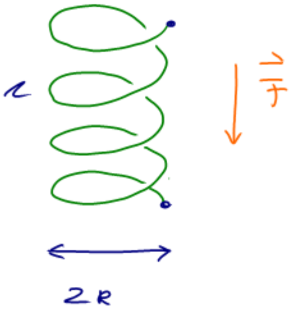
Def.: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, Weg $c : [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^3$

$$\rightarrow \boxed{\int_c \vec{A}\, d\vec{l} := \int_{u_1}^{u_2} \left\langle \vec{A}(\vec{r}(u)), \frac{d\vec{r}}{du}(u) \right\rangle du}$$

<u>un</u>abhängig von gewählter Parametrisierung des Wegs c !

(Substitutionsregel!)

Beispiel: Teilchen längs Schraubenweg wie oben im Schwerkraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$

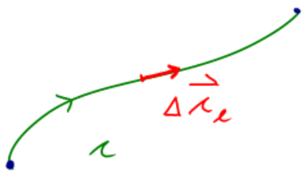


$$c : [0, 2\pi n] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad u \longmapsto \vec{c}(u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ \frac{H}{2\pi n}\, u \end{pmatrix}$$

$$W = -\int_c \vec{F}\, d\vec{l} = ?$$

$$\underline{\underline{W}} = -\int_c \vec{F}\, d\vec{l} = -\int_0^{2\pi n} \Big\langle \underbrace{\vec{F}(\vec{c}(u))}_{= -mg\,\vec{e}_z}, \underbrace{\frac{d\vec{c}}{du}(u)}_{= \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ H/2\pi n \end{pmatrix}} \Big\rangle\, du = \int_0^{2\pi n} \frac{mgH}{2\pi n}\, du = \underline{\underline{mgH}}$$

Wegintegral des Skalarfelds f längs Weg c:



$$\int_c f \, dl := \lim_{|\Delta \vec{r}_\ell| \to 0} \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell \, |\Delta \vec{r}_\ell|$$

mittels Parametrisierung $\quad c : [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^3$:

$$|\Delta \vec{r}_\ell| = \left| \frac{d\vec{r}(u_\ell)}{du} \right| \Delta u \quad , \quad f_\ell = f(\vec{r}(u_\ell))$$

$\to$ Def.:

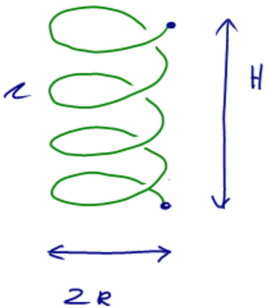
$$\boxed{\int_c f \, dl := \int_{u_1}^{u_2} f(u) \left| \frac{d\vec{r}}{du}(u) \right| du}$$

unabhängig von gewählter Parametrisierung

$\boxed{f = 1}$: $\longrightarrow$ Länge des Wegs c :

$$\boxed{L(c) = \int_c d\ell = \int_{u_1}^{u_2} \left| \frac{d\vec{c}}{du}(u) \right| du}$$

Beispiel: Länge des obigen Schraubenwegs:

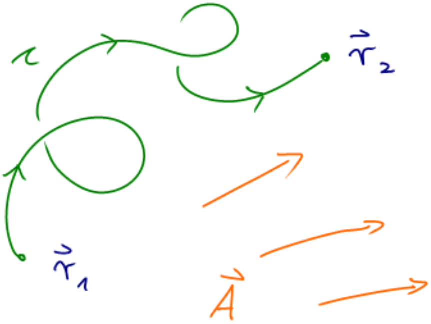


$$c : [0, 2\pi n] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad u \longmapsto \vec{c}(u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R \sin u \\ \frac{H}{2\pi n} u \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left| \frac{d\vec{c}}{du} \right| = \left\| \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ H/2\pi n \end{pmatrix} \right\| = \left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi n}\right)^2 \right)^{1/2}$$

n Windungen $\rightarrow$ Länge $\underline{L(c)} = \int_0^{2\pi n} \left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi n}\right)^2 \right)^{1/2} du = \underline{\sqrt{(2\pi R n)^2 + H^2}}$

Wegintegrale konservativer Vektorfelder stellen sich als besonders einfach heraus!



- $c : [u_1, u_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  $c(u_1) = \vec{r}_1, \qquad c(u_2) = \vec{r}_2$

- $\vec{A}$ konservativ $\longrightarrow$ es gibt ein Potenzial Φ zu $\vec{A}$

  d.h. $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{r})}$

$$\int_c \vec{A}\, d\vec{\ell} = \int_{u_1}^{u_2} \left\langle \vec{A}(\vec{c}(u)), \frac{d\vec{c}}{du}(u) \right\rangle du = -\int_{u_1}^{u_2} \underbrace{\left\langle \operatorname{grad} \Phi(\vec{c}(u)), \frac{d\vec{c}}{du}(u) \right\rangle}_{= \frac{d}{du} \Phi(\vec{c}(u))\ !} du$$

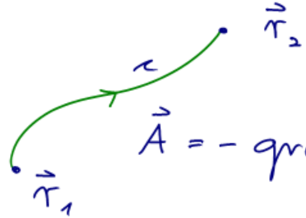
Vrlsg. 20, S 6, 3)

$$\underset{\text{HDI}}{=} \Phi(\vec{c}(u_1)) - \Phi(\vec{c}(u_2))$$

$$= \Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2)$$

$\longrightarrow$ Das Wegintegral eines konservativen Vektorfelds ist die Differenz der Potenziale von Anfangs- und Endpunkt des Wegs:

$$\int_c \vec{A}\, d\vec{l} = \Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2) ,$$

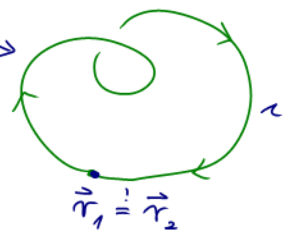


$\vec{A} = -\operatorname{grad} \Phi$

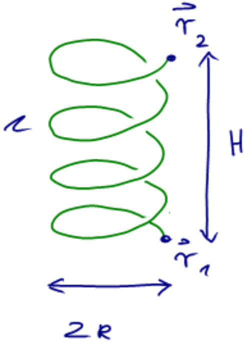
insbesondere:

$\vec{A}$ konservativ, c geschlossen

$$\longrightarrow \quad \int_c \vec{A}\, d\vec{l} = 0$$



Beispiel:



$$\vec F(\vec r) = -mg\,\vec e_z \overset{!}{=} -\operatorname{grad}(mgz)$$

d.h. $\vec F$ konservativ mit Potenzial

$$\Phi(\vec r) = mgz$$

$$\rightarrow \quad W = -\int_{\mathcal{C}} \vec F \, d\vec\ell = \Phi(\vec r_2) - \Phi(\vec r_1) = mg(z_2 - z_1)$$

$$= mgH \quad ✓$$

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konservativität eines Vektorfelds $\vec{A} : \underline{\underline{\mathbb{R}^3}} \rightarrow \mathbb{R}^3$:

!

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\vec{A}$ konservativ

(ii) für jeden geschlossenen Weg c ist $\int_c \vec{A}\, d\vec{l} = 0$

(iii) $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$

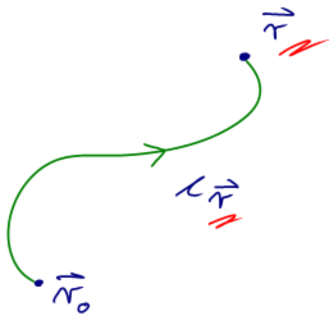
- „(i) ⇒ (ii)" bereits gezeigt ✓
- „(i) ⇒ (iii)": $\vec{A}$ konservativ $\rightarrow$ es gibt ein $\Phi(\vec{r})$ derart, dass $\vec{A} = -\operatorname{grad} \Phi$ $\rightarrow$ $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Phi = -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Phi = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$ ✓

- „(iii) ⇒ (i)": später!

- „(ii) ⇒ (i)": nach Voraussetzung Vf. $\vec{A}$ derart, dass für jeden geschl. Weg c $\oint_c \vec{A}\,d\vec{\ell} = 0$. Wir definieren Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie folgt:

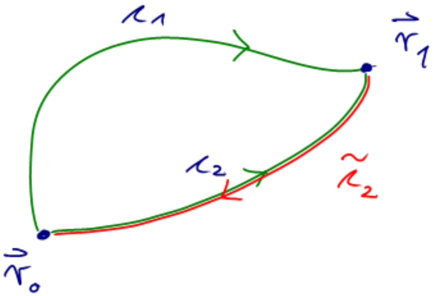
$$(1) \quad \boxed{\phi(\vec{r}) := -\int_{c_{\vec{r}}} \vec{A}\,d\vec{\ell}},$$

wobei $c_{\vec{r}}$ ein <u>beliebiger</u> Weg von einem fest gewählten $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$:



$\phi(\vec{r})$ nach (1) wohldefiniert ?

<u>zu zeigen:</u> $\int_{C_{\vec r}} \vec A \, d\vec l$ ist <u>un</u>abhängig vom gewählten Weg $C_{\vec r}$!



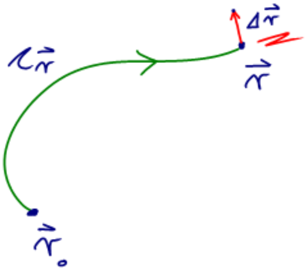
$C =$ „$C_1 + \tilde C_2$" sei der Weg mit Teilwegen C_1 und $\tilde C_2$, d.h. C <u>geschlossen</u> und somit

$$0 \overset{!}{=} \int_{C} \vec A \, d\vec l = \int_{C_1} \vec A \, d\vec l + \underbrace{\int_{\tilde C_2} \vec A \, d\vec l}_{= \; -\int_{C_2} \vec A \, d\vec l} = \int_{C_1} \vec A \, d\vec l - \int_{C_2} \vec A \, d\vec l$$

d.h. $$\int_{C_1} \vec A \, d\vec l = \int_{C_2} \vec A \, d\vec l$$

wir zeigen nun: $\Phi(\vec r) = -\int\limits_{C_{\vec r}} \vec A \, d\vec \ell$ ist <u>Potenzial</u> von $\vec A$!

betrachte dazu $\Phi(\vec r + \underline{\underline{\Delta \vec r}})$ für $|\Delta \vec r| \to 0$:



$$\to \quad \Phi(\vec r + \Delta \vec r) = -\int\limits_{C_{\vec r}} \vec A \, d\vec \ell - \langle \vec A(\vec r), \underline{\underline{\Delta \vec r}} \rangle$$

$$= \Phi(\vec r) - \langle \vec A(\vec r), \Delta \vec r \rangle$$

$$\overset{!}{=}$$

anderseits : $$\Phi(\vec r + \Delta \vec r) = \Phi(\vec r) + \langle \operatorname{grad} \Phi(\vec r), \Delta \vec r \rangle$$

für bel. $\Delta \vec r$!

$$\to \quad \vec A(\vec r) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec r) \,;$$ d.h. Φ ist Potenzial von $\vec A$ ✓