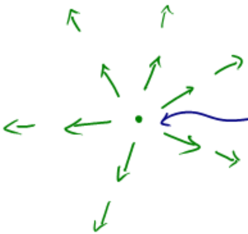
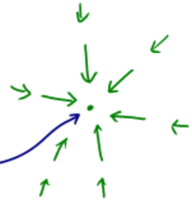
Divergenz eines Vektorfelds, Satz von Gauß

- Divergenz (≡ Quellstärke) eines Vektorfelds $\vec{A}$: $\boxed{\operatorname{div}\vec{A}}$

  (Skalarfeld)



$\operatorname{div}\vec{A} > 0$

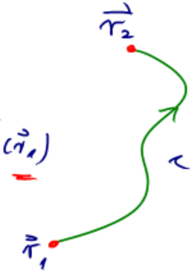


$\operatorname{div}\vec{A} < 0$

- Satz von Gauß verallgemeinert HDI:

  - $\int_a^b \left(\frac{d}{dx} f\right) dx \overset{!}{=} f\Big|_a^b$

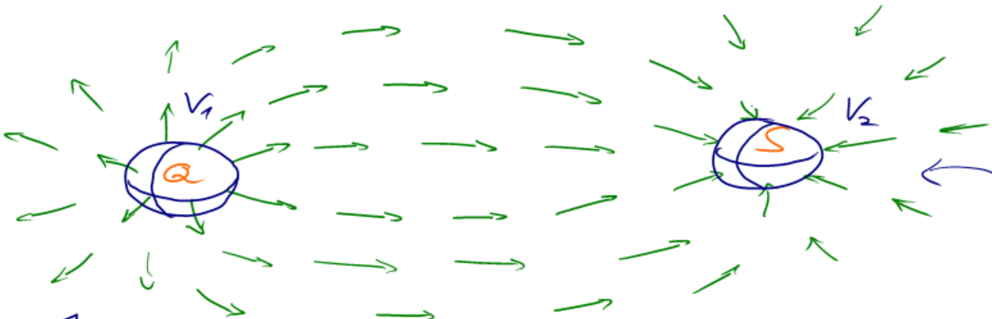
  - $\int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad}\Phi \, d\vec{\ell} \overset{!}{=} \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$



$$\boxed{\int_G \operatorname{div}\vec{A}\, dV \overset{!}{=} \int_{\partial G} \vec{A}\, d\vec{f}}$$

$\longrightarrow$ Elektrostatik, Newt. Gravitation!

Divergenz (= Quellstärke) eines Vektorfelds



„Senke“ :

$$\int_{S_2} \vec{A}\, d\vec{f} < 0$$

↳ Oberfläche von V_2

"Quelle“ :

$$\int_{S_1} \vec{A}\, d\vec{f} > 0$$

↳ Oberfläche von V_1

→ **Def.** :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) := \lim_{|V| \to 0} \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f}}$$

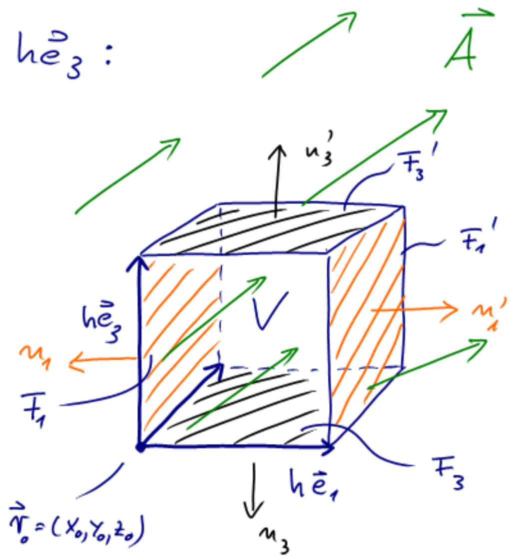
V : Volumengebiet um $\vec{r}$

$|V|$: Volumeninhalt von V

∂V : Oberfläche von V („Rand“)

→ Berechnung der Divergenz in kart. Koordinaten:

$V \overset{!}{=}$ Würfel mit Kanten $h\vec{e}_1, h\vec{e}_2, h\vec{e}_3$:

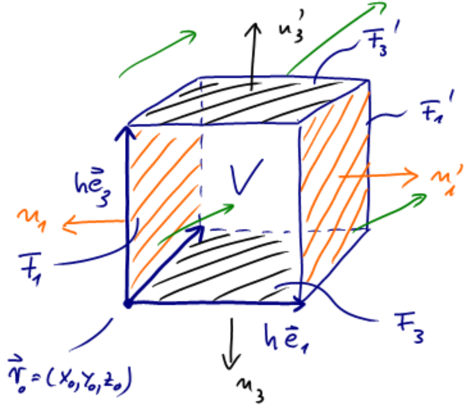


$$\partial V = F_1 \cup F_1' \cup F_2 \cup F_2' \cup F_3 \cup F_3'$$

$$\int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} = \int_{F_1 \cup F_1'} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{F_2 \cup F_2'} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{F_3 \cup F_3'} \vec{A}\, d\vec{f}$$

2 →

$$\int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} = \int_{F_1 \cup F_1'} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{F_2 \cup F_2'} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{F_3 \cup F_3'} \vec{A}\, d\vec{f}$$



$$\underline{\underline{\int_{F_1 \cup F_1'} \vec{A}\, d\vec{f}}} = \int_{y_0}^{y_0+h} \int_{z_0}^{z_0+h} \underbrace{\left[A_1(x_0 + h, y, z) - A_1(x_0, y, z) \right]}_{= h \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(x_0, y, z)} dy\, dz \overset{h \to 0}{=} h^3 \underline{\underline{\frac{\partial A_1}{\partial x_1}(\vec{r}_0)}}$$

analog:

$$\underline{\underline{\int_{F_2 \cup F_2'}}} \vec{A}\, d\vec{f} = h^3 \underline{\underline{\frac{\partial A_2}{\partial x_2}}}(\vec{r}_0), \qquad \underline{\underline{\int_{F_3 \cup F_3'}}} \vec{A}\, d\vec{f} = h^3 \underline{\underline{\frac{\partial A_3}{\partial x_3}}}(\vec{r}_0)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3} \int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(\vec{r}_0) + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(\vec{r}_0) + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(\vec{r}_0)$$

$\rightarrow$ Berechnung der Divergenz von $\vec{A}$ in kartesischen Koordinaten:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \equiv \vec{\nabla} \vec{A}}$$

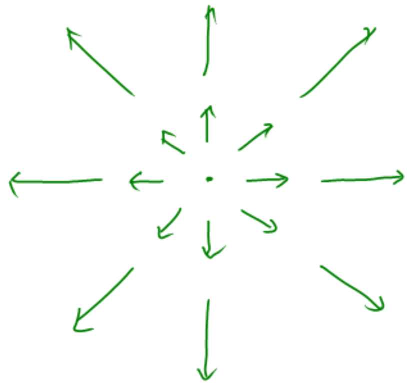
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

beachte:

$$\text{Vektorfeld } \vec{A} \xrightarrow{\operatorname{div}} \text{Skalarfeld } \operatorname{div} \vec{A}$$

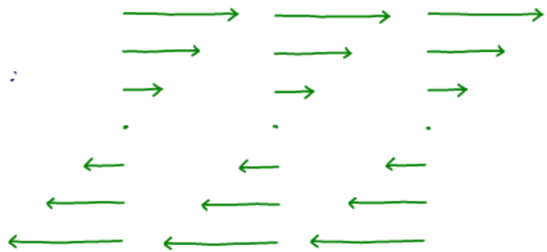
Beispiele:

a) Vf. $\vec{r} \longmapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:



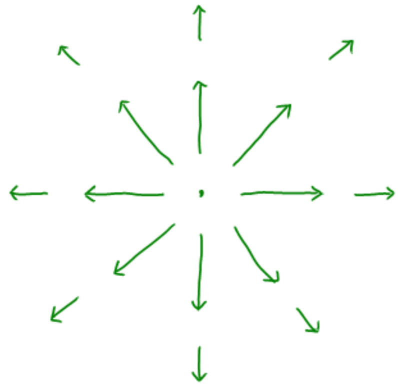
$$\underline{\underline{\operatorname{div} \vec{r}}} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = \underline{\underline{3}}$$

b) Vf. $\vec{r} \longmapsto x_2 \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:



$$\operatorname{div}(x_2 \vec{e}_1) = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \underline{\underline{0}}$$

c) Vf. $\vec{r} \longmapsto \frac{\hat{r}}{r^2}$ $\quad (\vec{r} \neq \vec{0})$:



$$\underline{\underline{\operatorname{div} \frac{\hat{r}}{r^2}}} = \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x_i^2}{r^5} \right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}_{= r^2}$$

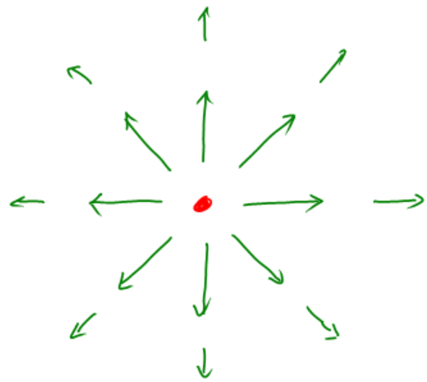
$$= \underline{\underline{0}} \quad !$$

d) Skalarfeld f, Vektorfeld $\vec{A}$:

$$\boxed{\operatorname{div}(f\vec{A}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{A} \rangle + f \operatorname{div} A}$$

$\Big[$ denn $\operatorname{div}(f\vec{A}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f A_i) = \underbrace{\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} A_i}_{= \langle \operatorname{grad} f, \vec{A} \rangle} + \underbrace{\sum_i f \frac{\partial A_i}{\partial x_i}}_{= f \operatorname{div} \vec{A}}$ $\Big]$

e) Wie lautet die Flussdichte $\vec{j}$ einer Punktquelle der Stärke I_0 im Ursprung?



Anforderungen:

1) $\operatorname{div} \vec{j} \overset{!}{=} 0$ für $\vec{r} \neq \vec{0}$

2) $\int_{S_R} \vec{j} \, d\vec{f} \overset{!}{=} I_0$ für Sphäre S_R mit Zentrum in 0

3) sphärische Symmetrie: $\vec{j}(\vec{r}) \overset{!}{=} f(r) \vec{r}$

$\vec{j} = ?$

das durch 1) – 3) eindeutig bestimmte Vektorfeld lautet

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I_0}{4\pi r^2}\,\hat{r}}$$

- $\operatorname{div}\vec{j} = \frac{I_0}{4\pi}\operatorname{div}\frac{\hat{r}}{r^2} \overset{*)}{=} 0$ für $\vec{r} \neq 0$;

- $\int_{S_R} \vec{j}\, d\vec{f} = I_0$ (vgl. Übung 3, Blatt 10)

gibt es weitere Lösungen? Nein, denn mit $\vec{j} = f(r)\,\vec{r}$ (sym.!)

folgt aus $0 \overset{!}{=} \operatorname{div}\vec{j} = \operatorname{div}(f\,\vec{r}) = \langle \underbrace{\operatorname{grad} f}_{= f'\hat{r}}, \vec{r}\rangle + f\,\underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{= 3} = f'r + 3f$:

$f' = -\frac{3}{r} f$ ⟵ DGL für $f(r)$ mit allg. Lösung $f(r) = c \cdot \frac{1}{r^3}$

$\rightsquigarrow \vec{j} = \frac{c}{r^3}\,\vec{r}$ mit $c = \frac{I_0}{4\pi}$ nach Bed. 2)

Anwendung: Gaußsches Gesetz der Elektrostatik:

qualitativ: $\boxed{\text{Elektrische Ladungen sind Quellen des elektrischen Felds}}$

- $\frac{\text{elekt. Ladung}}{\text{Volumen}}$ = Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ (Skalarfeld)

- elekt. Feld: $\vec{E}(\vec{r})$ (Vektorfeld)

quantitativ: $$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

ε_0 : elekt. Feldkonstante ($\varepsilon_0 \simeq 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)