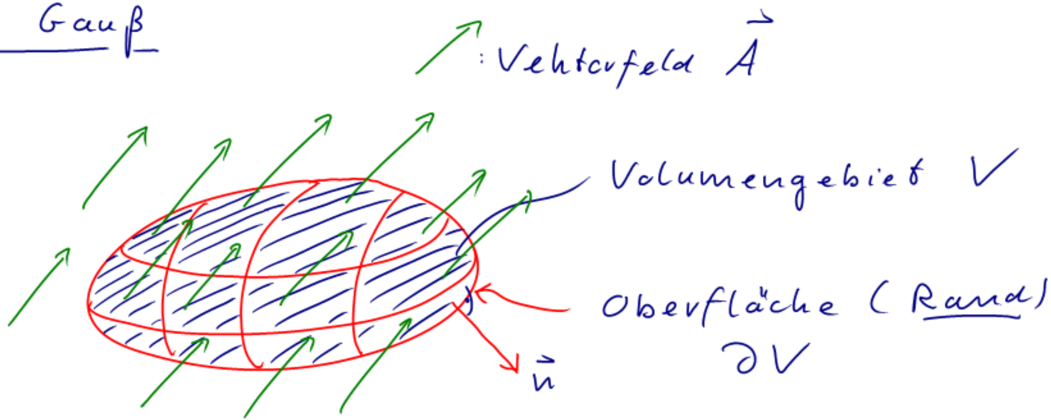
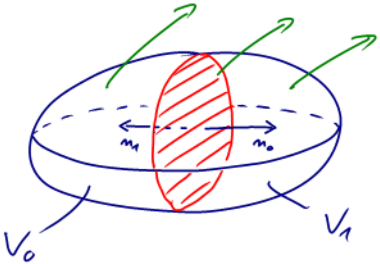
# Satz von Gauß



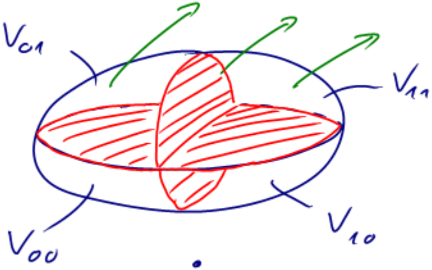

$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} \overset{!}{=} \int_{V} \operatorname{div} \vec{A}\, dV}$$

(Netto)-Fluss von $\vec{A}$ durch Rand von $V$ $\overset{!}{=}$ ✓ Gesamtquellstärke von $\vec{A}$ im $V$

„Physikerbeweis" des Satz von Gauß:

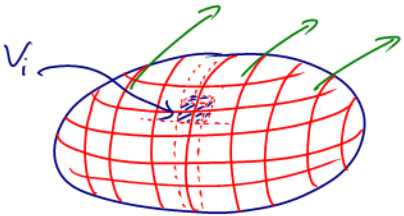



$$\int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} \overset{!}{=} \int_{\partial V_0} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_1} \vec{A}\, d\vec{f}$$




$$= \int_{\partial V_{00}} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_{01}} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_{10}} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_{11}} \vec{A}\, d\vec{f}$$

⋮

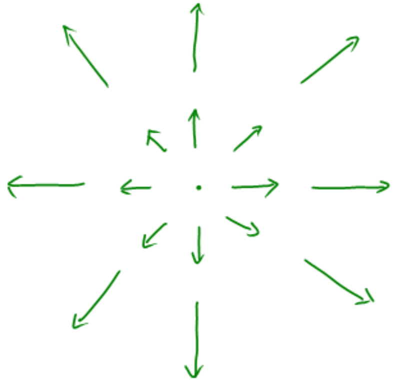



$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\left( \frac{1}{|V_i|} \int_{\partial V_i} \vec{A}\, d\vec{f} \right)}_{\operatorname{div} \vec{A}} |V_i| = \int_V \operatorname{div} \vec{A}\, dV \quad ✓$$

$|V_i| \to 0$

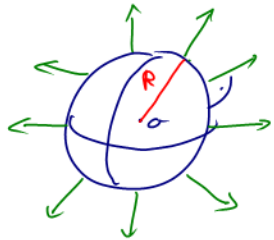
## Beispiele und Anwendungen:

1) Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$



$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{r} = 3$$

1a) Fluss von $\vec{A}$ durch Sphäre $S_R$ mit Radius $R$ und Zentrum $o$:




direkt:

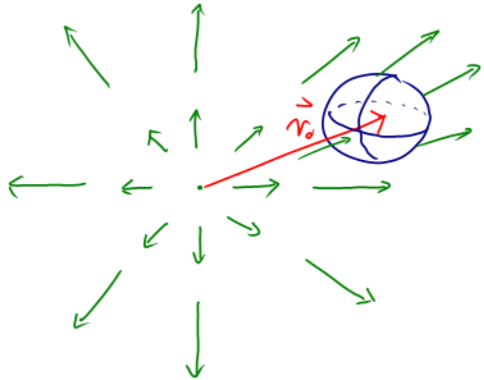
$$\int_{S_R} \vec{r}\, d\vec{f} \overset{\uparrow}{=} 4\pi R^2 \cdot R = 4\pi R^3$$

- $|\vec{r}| = R$ auf $S_R$
- $\vec{r} \perp d\vec{f}$

mit S.v. Gauß: $S_R \overset{!}{=} \partial K_R$ ; $K_R$: Kugel mit Radius $R$, Zentrum $o$

$$\Rightarrow \int_{S_R} \vec{r}\, d\vec{f} = \int_{\partial K_R} \vec{r}\, d\vec{f} = \int_{K_R} \underbrace{\operatorname{div} \vec{r}}_{=3}\, dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 3 = 4\pi R^3 \quad ✓$$

1b) Fluss von $\vec{A}$ durch Sphäre mit Radius $R$ und Zentrum $\vec{r}_0$




direkt: $\displaystyle\int_{S_R(\vec{r}_0)} \vec{r}\, d\vec{f} = ?$

kompliziert!

mit S.v. Gauß: $S_R(\vec{r}_0) \overset{!}{=} \partial K_R(\vec{r}_0)$ ; $K_R(\vec{r}_0)$: Kugel mit Rad. $R$, Zentrum $\vec{r}_0$

$$\Rightarrow \int_{S_R(\vec{r}_0)} \vec{r}\, d\vec{f} = \int_{\partial K_R(\vec{r}_0)} \vec{r}\, d\vec{f} \overset{\text{Gauß!}}{=} \int_{K_R(\vec{r}_0)} \mathrm{div}\,\vec{r}\, dV = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot 3 = \underline{\underline{4\pi R^3}} \; !$$

(unabhängig von $\vec{r}_0$)

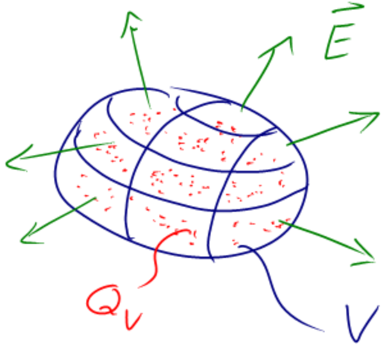
## 2) Gaußsches Gesetz der Elektrostatik:

"elektrische Ladungen sind Quellen des elektr. Felds"

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho} \quad (*)$$

$\vec{E}$ : elektrisches Feld

$\rho$ : elektr. Ladungsdichte




integrale Form:

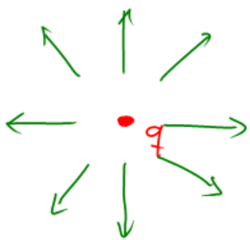
$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{E}\,d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,Q_V}$$

„Der elektrische Fluss durch die Oberfläche $\partial V$ eines Volumens $V$ ist gleich der darin enthaltende Ladung $Q_V$ $(\cdot\, 1/\varepsilon_0)$"

denn:

$$\int_{\partial V} \vec{E}\,d\vec{f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Gauß}}}{=} \int_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV \overset{(*)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\overbrace{\int_V \rho\,dV}^{=\,Q_V} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,Q_V \quad ✓$$

2a) Elektrische Feld einer Punktladung $q$ im Ursprung?

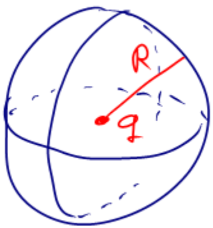



$\vec{E}(\vec{r}) = ?$

aus Symmetriegründen: $\vec{E}(\vec{r}) \overset{!}{=} \underline{E(r)}\,\hat{r}$ (1) ;

Bestimmung von $E(r)$ mittels Gauß. Gesetz in <u>integralen</u> Form:

betrachte Kugel $K_R$ mit Radius $R$ und Zentrum $0$:




$$\frac{q}{\varepsilon_0} \overset{!}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{K_R} = \int_{\partial K_R} \vec{E}\, d\vec{f} \overset{(1)}{=} 4\pi R^2 E(R)$$

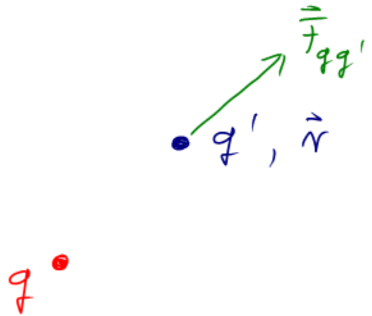
$$\leadsto E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \leadsto \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

$\rho \mathrel{\hat{=}}$ Ptkldg $q$ in $O$, Symmetrie s.u.G.

zusammengefasst:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \longleftrightarrow \quad \oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{f} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

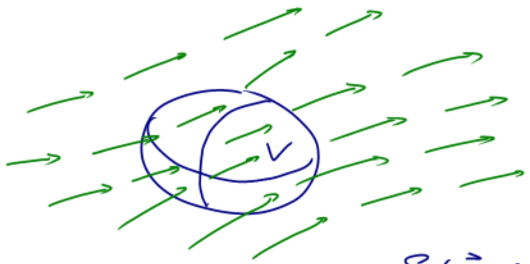
$\Rightarrow$ Kraft der Punktladung $q$ in $O$ auf Punktladung $q'$ bei $\vec{r}$




$$\vec{F}_{qq'} \equiv q' \vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \hat{r}$$

(Coulomb-Gesetz)

3) <u>Kontinuitätsgleichung</u> = Relation zwischen <u>Massendichte</u> $\rho$ und <u>Massenstromdichte</u> $\vec{j}$ eines Mediums aufgrund <u>Massenerhaltung</u>.




Masse in V zur Zeit t : $$M(t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\, dV$$

(Netto-) Massestrom aus V zur Zeit t : $$I(t) = \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{r},t)\, d\vec{V}$$

<u>Massenerhaltung</u> : $$\boxed{\frac{d}{dt} M(t) \overset{!}{=} - I(t)}$$

## Massenerhaltung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} M(t) \overset{!}{=} -I(t)}$$

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r},t)\, dV + \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{r},t)\, d\vec{f}$$

|| S. v. Gauß

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r},t)\, dV + \int_V \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t)\, dV$$

$$= \int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) \right) dV$$

für beliebige Vol. V: $\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \overset{!}{=} 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

( gilt wegen Ladungserhaltung auch für Ladungs(strom)dichte )