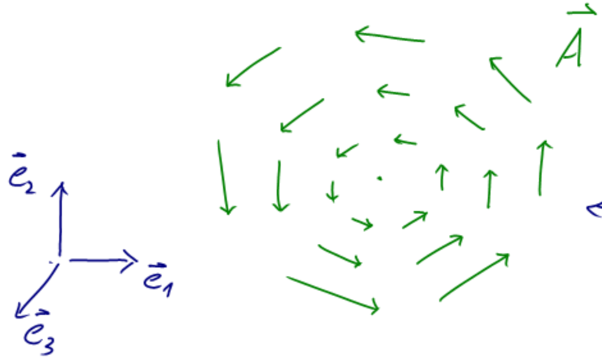
Rotation eines Vektorfelds u. Satz von Stokes

- **Rotation** (= **Wirbelstärke**) eines Vektorfelds $\vec{A}$: $\boxed{\text{rot}\,\vec{A}}$

  (Vektor feld)

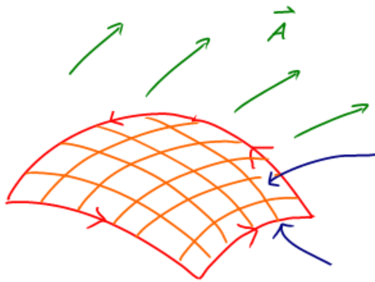


"Wirbel" um $\vec{e}_3$- Achse

$\hat{=}$ $(\text{rot}\,\vec{A})_3 \neq 0$

- **Satz von Stokes:**

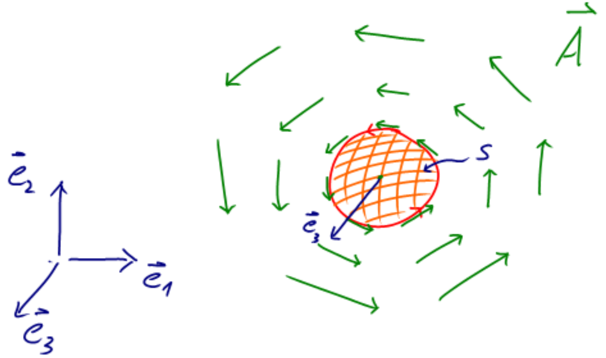
$$\boxed{\int_{\partial S} \vec{A}\, d\vec{\ell} \overset{!}{=} \int_S \text{rot}\,\vec{A}\; d\vec{f}}$$



Flächenst. S

Rand von S $= \partial S$

Rotation (= Wirbelstärke) eines Vektorfelds:



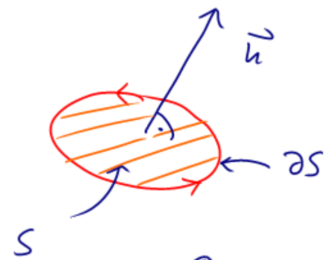
"Wirbel" um $\vec e_3$-Achse

$\hat{=}$

$$\int_{\partial S} \vec A \, d\vec l > 0$$

Def.: Rotation von $\vec A$ in $\vec r$: $\text{rot}\,\vec A(\vec r)$, Vektor, eindeutig bestimmt durch

$$\boxed{\langle \vec n, \text{rot}\,\vec A(\vec r)\rangle = \lim_{|S|\to 0} \frac{1}{|S|} \int_{\partial S} \vec A \, d\vec l}$$:

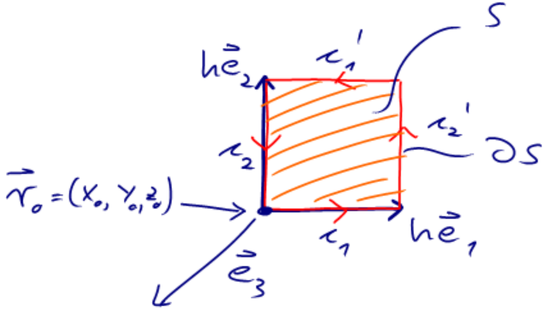


- Orientierung von ∂S gemäß rechter-Hand-Regel:

- $|S|$: Flächeninhalt von S

→ Berechnung der Rotation in kartesischen Koordinaten:

$\vec e_3$ - Komponente: $\quad (\mathrm{rot}\,\vec A(\vec r))_3 = \langle \vec e_3 , \mathrm{rot}\,\vec A(\vec r)\rangle$:



S = Quadrat mit Kanten $h\vec e_1$, $h\vec e_2$,

$\vec n = \vec e_3$

$\partial S =$ „$l_1 + l_2' + l_1' + l_2$“

$$\frac{1}{|S|}\int_{\partial S}\vec A\, d\vec l = \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_0+h}\Big(\underbrace{A_1(x, y_0, z_0) - A_1(x, y_0+h, z_0)}_{\simeq\, -\frac{\partial A_1}{\partial x_2}(x, y_0, z_0)\cdot h}\Big)\,dx$$

$$+ \frac{1}{h^2}\int_{y_0}^{y_0+h}\Big(\underbrace{A_2(x_0+h, y, z_0) - A_2(x_0, y, z_0)}_{\simeq\, \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(x_0, y, z_0)\cdot h}\Big)\,dy$$

$$\overset{h\to 0}{=} \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(\vec r_0) - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\vec r_0) \qquad \longrightarrow$$

d. h. $$(\operatorname{rot}\vec{A})_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

analog: $$(\operatorname{rot}\vec{A})_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

$\hookrightarrow$ <u>Berechnung der Rotation in kart. Koordinaten:</u>

mittels $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}$:

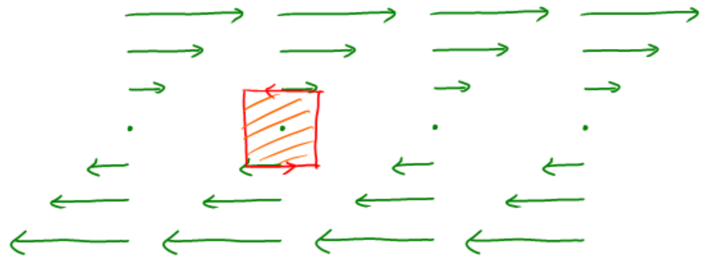
$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

mittels ε_{ijk} :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{A} &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \vec{e}_k \\ (\operatorname{rot}\vec{A})_k &= \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \end{aligned}}$$

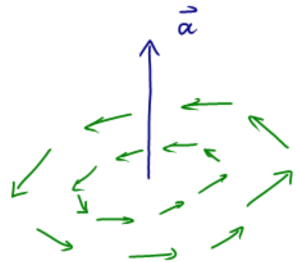
Beispiele und Anwendungen

1) Vf. $\vec{r} \longmapsto x_2 \vec{e}_1$:



$$\operatorname{rot} x_2 \vec{e}_1 = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{e}_3$$

2) Vf. $\vec{r} \longmapsto \vec{a} \times \vec{r}$:



a) O.b.d.A. sei $\vec{a} = a\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\rightsquigarrow$ $\vec{a} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -a x_2 \\ a x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} -a x_2 \\ a x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} = 2\vec{a}$$

alternativ:

b) $\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{r}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(\vec{a}\times\vec{r})_j}_{\substack{\shortparallel \\ \varepsilon_{lmj} a_l x_m}} \vec{e}_k$

$$= \sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{mjl} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} x_m}_{= \delta_{mi}} a_l \vec{e}_k$$

$$= \sum_{ijkl} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijl}\, a_l \vec{e}_k \overset{!}{=} 2 \sum_l a_l \vec{e}_l$$

$$= 2\vec{a}$$

$\therefore$ $$\boxed{\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{r}) = 2\vec{a}}$$

(d.h. $\vec{r} \mapsto \vec{a}\times\vec{r}$ ist Vf. konstanter Rotation $2\vec{a}$)

3) $\underline{\text{Skalarfeld}}$ f , $\underline{\text{Vektorfeld}}$ $\vec{A}$ $\rightarrow$ $\underline{\text{Vektorfeld}}$ $f\vec{A}$:

$$\rightarrow \quad \boxed{\operatorname{rot}(f\vec{A}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{A} + f \operatorname{rot} \vec{A}}$$

denn

$$\operatorname{rot}(f\vec{A}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(f A_j)}_{= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) A_j + f \frac{\partial A_j}{\partial x_i}} \vec{e}_k$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}_{= (\operatorname{grad} f)_i} A_j \vec{e}_k + f \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \vec{e}_k$$

$$= (\operatorname{grad} f) \times \vec{A} + f \operatorname{rot} \vec{A} .$$

4) $$\operatorname{rot}\vec{r} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{}\!\!{}^{=\delta_{ij}}\, \vec{e}_k = \sum_{ik} \varepsilon_{iik}\, \vec{e}_k = \vec{0}$$

5) $\boxed{\text{Jedes isotrope Zentralfeld hat \underline{verschwindende} \underline{Rotation} (d.h. ist \underline{rotationsfrei})}}$

Γ denn $\operatorname{rot}(f(r)\,\vec{r}) \overset{3)}{=} \underbrace{(\underbrace{\operatorname{grad} f(r)}_{= f'(r)\,\hat{r}}) \times \vec{r}}_{=\vec{0}} + f(r) \underbrace{\operatorname{rot}\vec{r}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$ $\perp$

6) <u>Faradaysches Induktionsgesetz</u> (Elektrodynamik)

<u>qualitativ</u>:

Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld

Magnetfeld: $\vec{B}(\vec{r}, t)$

elektr. Feld: $\vec{E}(\vec{r}, t)$

<u>quantitativ</u>:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} \overset{!}{=} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$