Skalarprodukt, euklidischer Raum

Translationen besitzen geometrische Eigenschaften (Länge einer Transl., Winkel zwischen zwei Translationen) und genügen euklidischer Geometrie (z.B. dem Satz des Pythagoras: $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ dann

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 ;$$

)

→ Vektorraum der Translationen benötigt zusätzliche Struktur, damit diese geometrischen Eigenschaften erfasst und beschrieben werden können:

$\boxed{\text{Skalarprodukt}}$ → geometrische Begriffe (Länge, Orthogonalität, Winkel, s.u.)

→ euklidische Geometrie

Definition

Ein <u>Skalarprodukt</u> eines reellen Vektorraums V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

mit den Eigenschaften

(SP1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ (Symmetrie)

(SP2) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ für $\vec{a} \neq 0$ und $\langle \vec{o}, \vec{o} \rangle = 0$. (Positivität)

(SP3) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \lambda \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ (Linearität)

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt bildet einen <u>euklidischen Raum</u>.

alternative Notationen:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{a}\,\vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}) \equiv \dots$$

mittels Skalarprodukt definieren wir weiter:

<u>Länge</u> (auch: <u>Betrag</u>) eines Vektors $\vec{a}$:

$$\boxed{|\vec{a}| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}}$$

<u>Orthogonalität</u>:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \quad (\text{„}\vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b}\text{"}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0}$$

<u>Richtungsvektor</u> $\hat{a}$ eines Vektors $\vec{a}$:

$$\boxed{\hat{a} := \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \cdot\ |\hat{a}| = 1 \\ \cdot\ \hat{a} \parallel \vec{a} \end{array}$$

Beispiele:

1) $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$ $\longrightarrow$ $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c}$, $\lambda \vec{a} \perp \vec{c}$

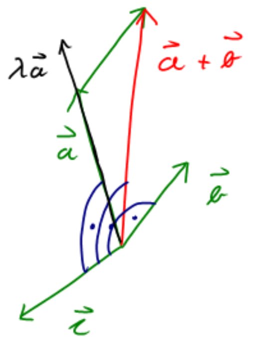
$\ulcorner$ $\vec{a} \perp \vec{c}$ bedeutet $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$,

$\vec{b} \perp \vec{c}$ bedeutet $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$,

- $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle \overset{(SP3)}{=} \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$, d.h. $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c}$; ✓

- $\langle \lambda \vec{a}, \vec{c} \rangle \overset{(SP3)}{=} \lambda \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$; d.h. $\lambda \vec{a} \perp \vec{c}$. ✓

geometrisch (Translationen) :

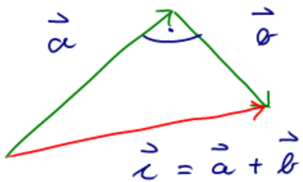


$\lrcorner$

2) $|\lambda \vec{a}| \overset{!}{=} |\lambda|\,|\vec{a}|$

$$\ulcorner \quad |\lambda \vec{a}| = \sqrt{\langle \lambda \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle} \overset{(SP3)}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = |\lambda| \underbrace{\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}}_{= |\vec{a}|} \quad \checkmark \quad \lrcorner$$

3) <u>Satz des Pythagoras:</u> $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \overset{!}{=} |\vec{c}|^2$



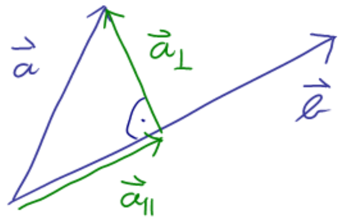
$\ulcorner$ wegen $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ und somit

$$|\vec{c}|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle \overset{(SP3)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \overbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}^{=0} + \overbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}^{=0} + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \quad \checkmark \quad \lrcorner$$

Parallel- und Orthogonalkomponente eines Vektors $\vec{a}$ bzg $\vec{b}$

geometrisch:



$\vec{a}_\parallel$ und $\vec{a}_\perp$ sind bestimmt durch:

- $\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp = \vec{a}$
- $\vec{a}_\parallel \parallel \vec{b}$
- $\vec{a}_\perp \perp \vec{b}$

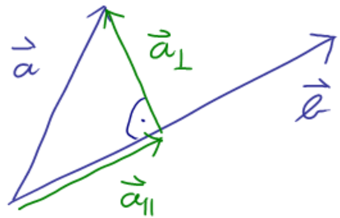
Parallelität:

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ („$\vec{a}$ parallel $\vec{b}$") $:\Longleftrightarrow$ $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$

mittels Skalarprodukt:

(1) $\boxed{\vec{a}_{\parallel} = \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \, \hat{b}}$

(2) $\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}$



$\left(\hat{b} = \vec{b} \,/\, |\vec{b}| \right)$

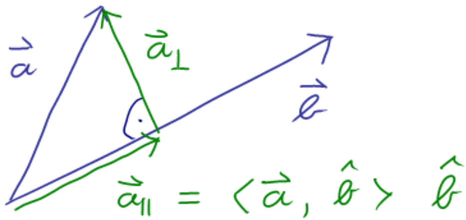
offenbar erfüllen $\vec{a}_{\parallel}$ und $\vec{a}_{\perp}$ nach (1) und (2): $\vec{a}_{\parallel} \parallel \vec{b}$

$\vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} = \vec{a}$;

noch zu zeigen: $\vec{a}_{\perp}$ (gemäß (1) und (2)) senkrecht $\hat{b}$!

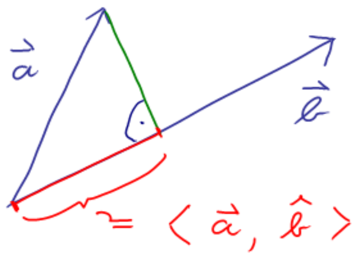
$$\langle \vec{a}_{\perp}, \hat{b} \rangle \overset{(2)}{=} \langle \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}, \hat{b} \rangle = \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \vec{a}_{\parallel}, \hat{b} \rangle$$

$$\overset{(1)}{=} \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \underbrace{\langle \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}, \hat{b} \rangle}_{= \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \underbrace{\langle \hat{b}, \hat{b} \rangle}_{= 1}} = 0 \quad \checkmark$$

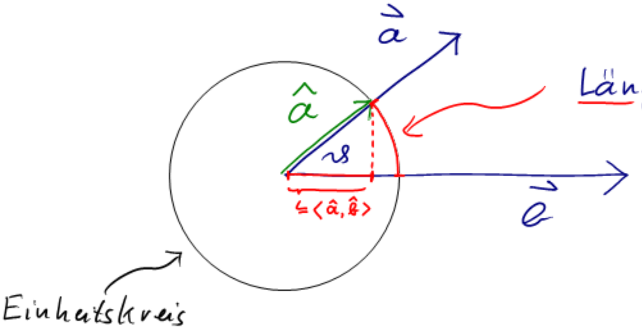


$\rightarrow$ geometrische Bedeutung des Skalarprodukts:

$$\boxed{\langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \text{ ist die Länge der Projektion des Vektors } \vec{a} \text{ auf } \vec{b}}$$



Winkel zwischen Vektoren:



Länge des Bogens = Winkel ϑ im Bogenmaß

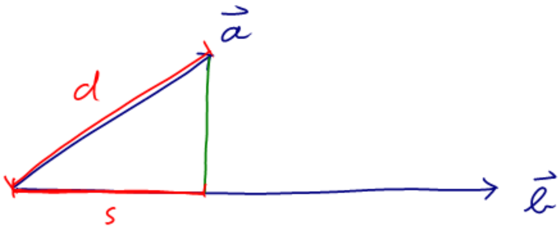
$$\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle \overset{!}{=} \cos \vartheta$$

$\rightarrow$ Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ ist definiert durch

$$\boxed{\cos \vartheta := \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

also gilt auch: $\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \vartheta}$ (geometrische Def. des S. P.)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:



$\boxed{s \le d}$ $\leftarrow$ Betrag von $\vec{a}$

Betrag der Projektion:

$$\rightarrow \qquad |\langle \vec{a}, \hat{b} \rangle| \le |\vec{a}|$$

$$\cdot|\vec{b}| \qquad \rightarrow \qquad \boxed{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

formaler Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{|\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle| \leq 1}$$

setze $\vec{u} = \hat{a}$ und $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$ bzgl. $\hat{b}$,

dann $\underline{\underline{1}} = |\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}, \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp} \rangle = |\vec{u}_{\parallel}|^2 + \underbrace{|\vec{u}_{\perp}|^2}_{\geq 0}$

$$\geq |\vec{u}_{\parallel}|^2 = \underline{\underline{|\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle|^2}}$$

d.h. $\underline{\underline{1}} \geq \underline{\underline{|\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle|}}$. ✓

Orthonormalbasis (ONB)

Eine Basis $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ eines euklidischen VRs ist <u>orthonormal</u> g.d.w.

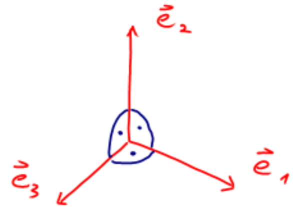
1) $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ für $i \neq j$

2) $|\vec{e}_i| = 1$

1) und 2) ist äquivalent zu

$$\boxed{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ 1 & : i = j \end{cases}}$$

δ_{ij} Kronecker-Delta



Berechnung des Skalarprodukts in Komponenten bzgl. einer Orthonormalbasis:

B ONB, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_B$

$$\rightsquigarrow \boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}$$

$\Big[$ $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ sei ONB, $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{e}_j$

$$\rightsquigarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \Big\langle \sum_i a_i \vec{e}_i , \sum_j b_j \vec{e}_j \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \underbrace{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \Big]$$

Beispiele:

1) **Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$:**

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{l=1}^{n} x_l y_l} \quad ;$$

(symmetrisch, positiv, linear ✓)

→ Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

offenbar <u>normiert</u> (d.h. vom Betrag 1) und paarweise <u>orthogonal</u>

→ $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ ONB des $\mathbb{R}^n$.

2) <u>Komponenten eines Vektors bzgl. ONB</u> $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B \equiv \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \, \vec{e}_\ell$$

$$\rightarrow \quad \langle \vec{e}_i, \vec{a} \rangle = \langle \vec{e}_i, \sum_\ell a_\ell \vec{e}_\ell \rangle = \sum_\ell a_\ell \underbrace{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_\ell \rangle}_{= \delta_{i\ell}} = a_i$$

d. h. $$\boxed{a_i = \langle \vec{e}_i, \vec{a} \rangle}$$

i-te Komponente von $\vec{a}$ bzgl. ONB $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$