Kronecker-Symbol, Levi-Civita-Symbol, Vektorprodukt-Identitäten

Kronecker-Symbol:

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i=j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}}$$

Anwendungen / Identitäten:

- $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ (falls $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ONB)
- $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$
- $\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ $\qquad \left[\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \equiv \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} \right) \right]$
- $\boxed{\sum_{l=1}^{n} \delta_{il} \delta_{lj} = \delta_{ij}}$

$\longrightarrow \quad \sum_{l,m=1}^{n} \delta_{il} \delta_{lm} \delta_{mj} = \delta_{ij}$; u.s.w.

Levi-Civita-Symbol:

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} \quad \text{für} \quad i,j,k \in \{1,2,3\}}$$

definiert durch (Levi-Civita: it. Mathematiker, 1873-1941)

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} := \langle \vec{e}_i \times \vec{e}_j , \vec{e}_k \rangle \overset{!}{=} \begin{cases} 1 : & (i,j,k) = (1,2,3) \text{ oder } (3,1,2) \text{ oder } (2,3,1) \\ -1 : & (i,j,k) = (1,3,2) \text{ oder } (2,1,3) \text{ oder } (3,2,1) \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}}$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ONB

kurz:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 ,$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 ,$$

$\varepsilon_{ijk} = 0$ wenn zwei der drei Indices i,j,k übereinstimmen

Anwendungen / Identitäten:

$$\boxed{\begin{aligned} &\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \qquad \text{(zyklische Permutation: } \boxed{i \,|\, j \,|\, k}\text{)} \\ &\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} \qquad \text{(Vertauschung: } \boxed{i \;\; j \;\; k}\text{)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{(\vec{e}_i \times \vec{e}_j)_k = \varepsilon_{ijk}} \qquad \left(\varepsilon_{ijk} = \langle \vec{e}_i \times \vec{e}_j , \vec{e}_k \rangle \right)$$

$$\to \quad \boxed{\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k} \qquad \left(\vec{a} = \sum a_k \vec{e}_k \right)$$

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j} \qquad \left((\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)_k \right)$$

$$\to \quad \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}} \qquad (*)$$

Merkschema:

$$\sum_{i} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = + \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}$$

Beweis der Identität (*)

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{jki}\, \varepsilon_{lmi}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)_i\, (\vec{e}_l \times \vec{e}_m)_i$$

$$= \langle \vec{e}_j \times \vec{e}_k , \vec{e}_l \times \vec{e}_m \rangle$$

$$\overset{!}{=} \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl} .$$

aus Identität (*) folgt:

<u>Grassmann-Identität</u> ("bac-cab"-Regel)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \, a_i \underbrace{\sum_{l,m} \varepsilon_{lmj} \, b_l c_m}_{= (\vec{b} \times \vec{c})_j}$$

$$= \sum_{i,l,m} a_i b_l c_m \sum_j \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jlm}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i,l,m} a_i b_l c_m \left(\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il} \right)$$

$$= b_k \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - c_k \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \, .$$

aus der Grassmann-Id. folgen:

Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$$

Lagrange-Identität

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

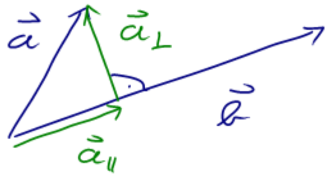
Jacobi-Id. folgt durch 3-maliges Anwenden der Grassmann-Id. ;

Lagrange-Id:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}), \vec{a} \rangle \overset{G.I}{=} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle .$$

Anwendungsbeispiel:

Orthogonalkomponente $\vec{a}_\perp$:



mittels Grassmann-Id („bac-cab") folgt:

$$(\hat{b} \times \vec{a}) \times \hat{b} = -\hat{b} \times (\hat{b} \times \vec{a}) = -\overbrace{\hat{b}\langle \hat{b}, \vec{a}\rangle}^{=\vec{a}_\parallel} + \vec{a}\overbrace{\langle \hat{b}, \hat{b}\rangle}^{=1}$$

$$= \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a}_\perp \, .$$