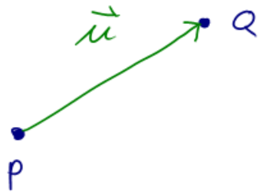
Koordinatensysteme des euklidischen Raums E_3

<u>eukl. Raum E_3</u> $\hat{=}$ Gesamtheit aller Raumpunkte;

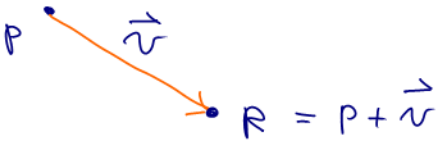
<u>kein</u> Vektorraum, aber je zwei Raumpkte $P, Q \in E_3$ bestimmen 3-dim Translations<u>vektor</u>:



$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} \in V$$

und umgekehrt: $P \in E_3$, $\vec{v} \in V$

$\to$ $R = P + \vec{v} \in E_3$; eindeutig bestimmt durch $\overrightarrow{PR} = \vec{v}$



($\to$ E_3 ist ein <u>affiner</u> Raum)

Kartesisches Koordinatensystem

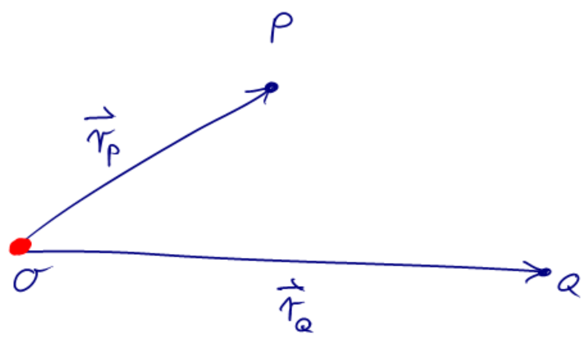
bestimmt durch 1) Ursprung $\mathcal{O} \in E_3$

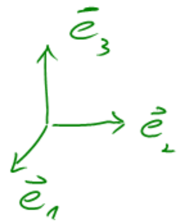
2) ONB $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ der Transl.

$\rightarrow$ bel. Raumpunkt $P \in E_3$ eindeutig beschrieben durch

Ortsvektor $\overrightarrow{\mathcal{O}P} \equiv \vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$ von P bzgl. $\mathcal{O}$

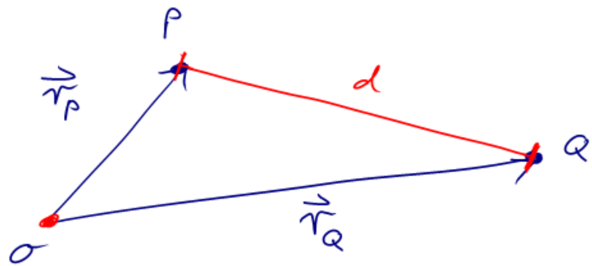
(mit kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 bzgl. B)





Beispiele:

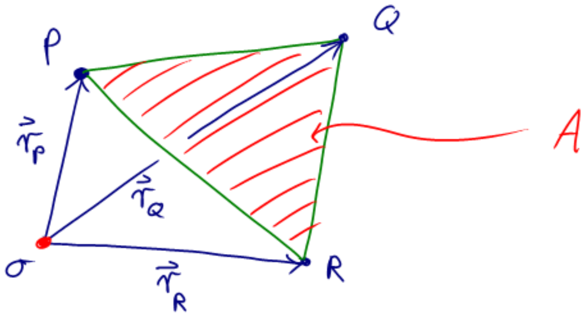
a) Abstand d zweier Pkte P und Q:



$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B , \quad \vec{r}_Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{r}_Q - \vec{r}_P| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2}$$

b) <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks P, Q, R:



$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|(\vec r_Q - \vec r_P) \times (\vec r_R - \vec r_P)\right|$$

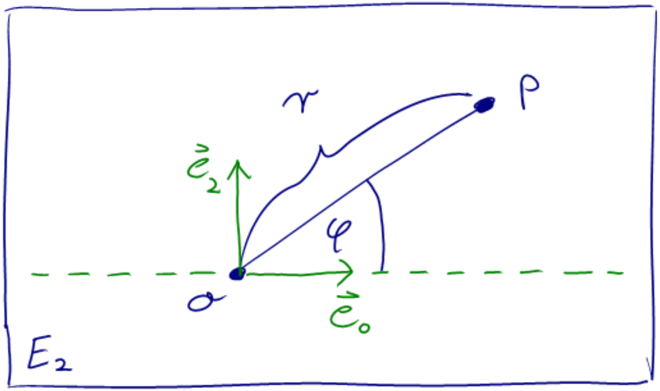
mit $\vec r_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\vec r_Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec r_R = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$:

$$A = \frac{1}{2}\left(\sum_k \left((\vec r_Q - \vec r_P) \times (\vec r_R - \vec r_P)\right)_k^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\sum_k \left(\sum_{ij} \varepsilon_{ijk}(y_i - x_i)(z_j - x_j)\right)^2\right)^{1/2}$$

Polarkoordinaten (für euklidische Ebene E_2)

gegeben durch 1) Ursprung $\sigma \in E_2$

2) Richtung $\vec{e}_0$



→ Polarkoordinaten ^{B} von P:

- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
- Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$

aus Polarkoordinaten (r, φ) eines Pkts P folgen seine kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) bzgl. σ, $B = \{\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_0, \vec{e}_2\}$ gemäß

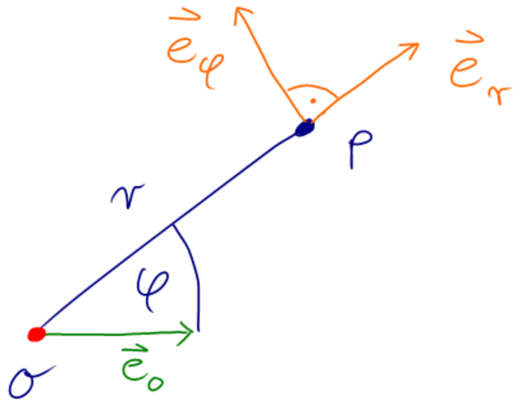
$$x_1 = r \cos\varphi$$
$$x_2 = r \sin\varphi$$

→ Ortsvektor von P: (bzgl. σ)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}_B$$

Zweckmäßig: lokale ONB am Punkt P:

$$L = (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$$



d.h. $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B$, $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B$

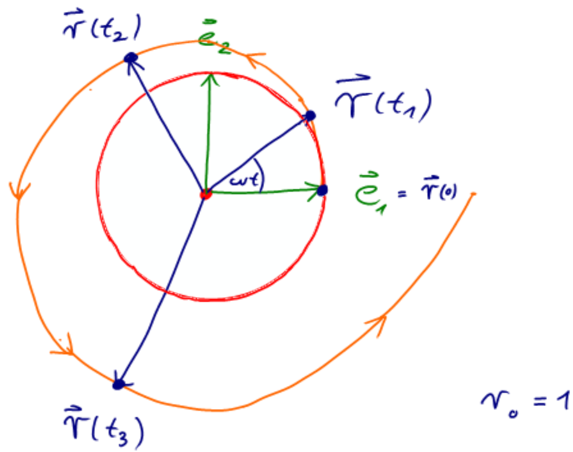
$\longrightarrow$ $\boxed{\vec{r} = r\,\vec{e}_r}$

Beispiel: Massenpunkt bewege sich in der Ebene gemäß zeitabhängigen Polarkoordinaten

$$r(t) = r_0 + v t$$
$$\varphi(t) = \omega t$$

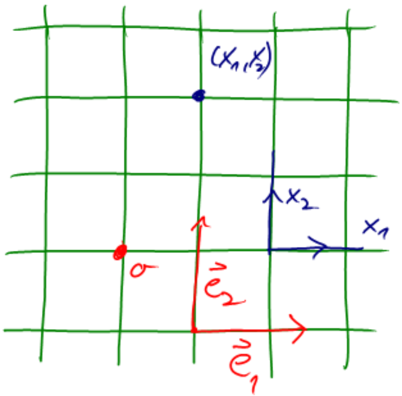
$$\rightarrow \quad \vec{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = (r_0 + v t)\, \vec{e}_r(t) :$$

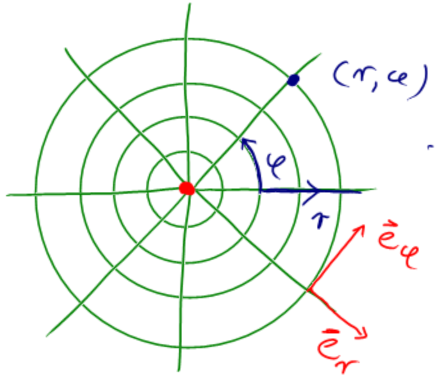


Kurzfassung:

Kartesische Koordinaten

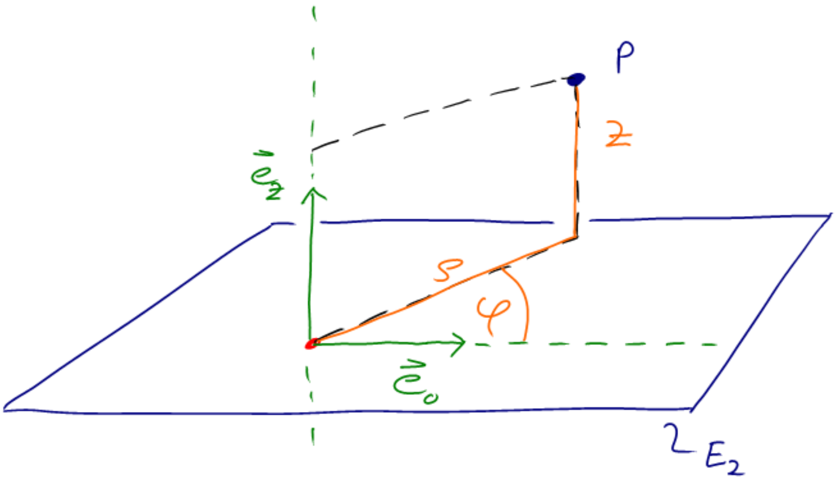


Polarkoordinaten



Zylinderkoordinaten (für den E_3)

durch Erweiterung der Polarkoordinaten (r, α) um Höhe z über der Ebene E_3



1) Ursprung O
2) Ebene $E_2 \perp \vec{e}_z$
3) Richtung $\vec{e}_0$ in E_2

$\rightarrow$ Zylinderkoordinaten von P:

- Radius $\varrho \in \mathbb{R}_+$
- Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
- Höhe $z \in \mathbb{R}$

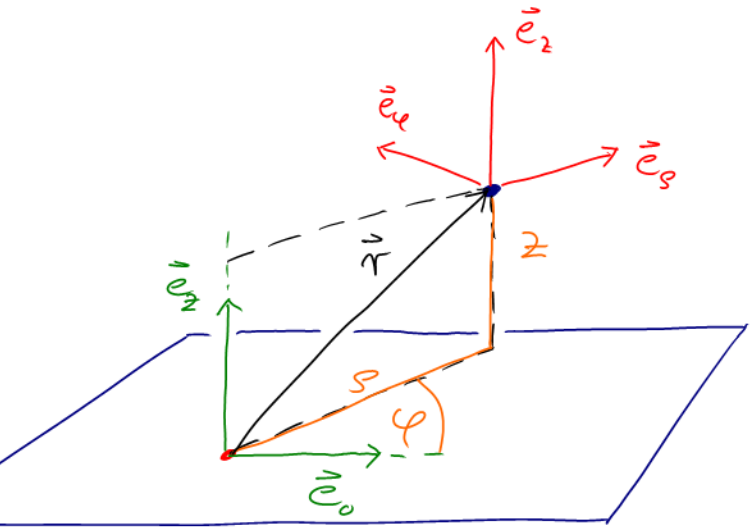
$\rightarrow$ Kartesische Koordinaten von P bzgl. σ, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$(\vec{e}_1 = \vec{e}_0,\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos\varphi \\ x_2 &= \rho \sin\varphi \\ x_3 &= z \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underline{\text{Ortsvektor}} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

<u>lokale ONB</u> $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$:

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



beachte:

$$|\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \neq \rho$$

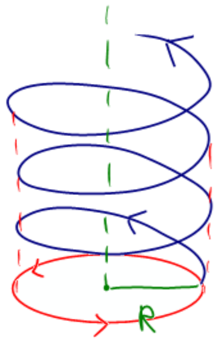
$$\hat{r} \neq \vec{e}_\rho$$

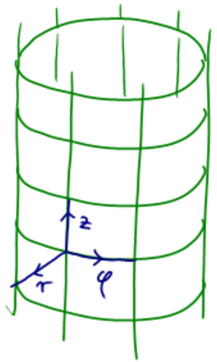
Beispiel:

Massenpunkt bewege sich gemäß

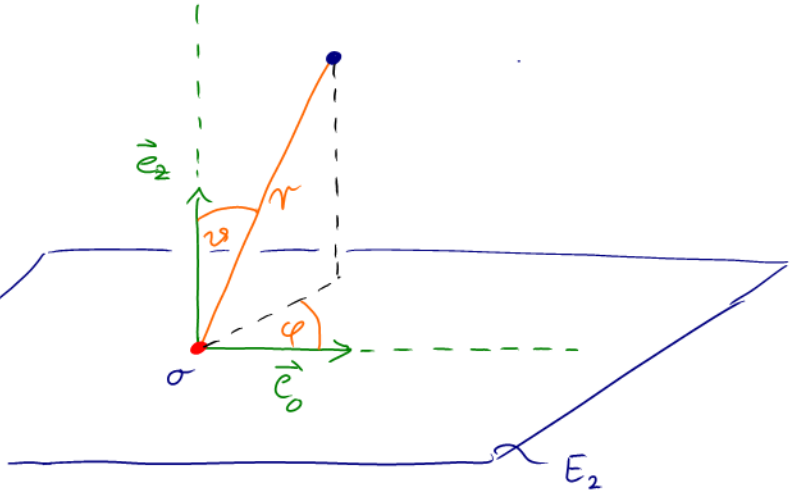
$$\begin{aligned} \rho(t) &= R \\ \varphi(t) &= \omega t \\ z(t) &= v t \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos\omega t \\ R \sin\omega t \\ v t \end{pmatrix}_B$$

etwa:





Kugelkoordinaten (auch: sphärische Koordinaten)



1) Ursprung σ
2) Ebene E_z $\perp$ Polachse $\vec{e}_z$
3) Richtung $\vec{e}_0$ in E_z

- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
- Azimuthwinkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
- Polarwinkel $\vartheta \in [0, \pi[$

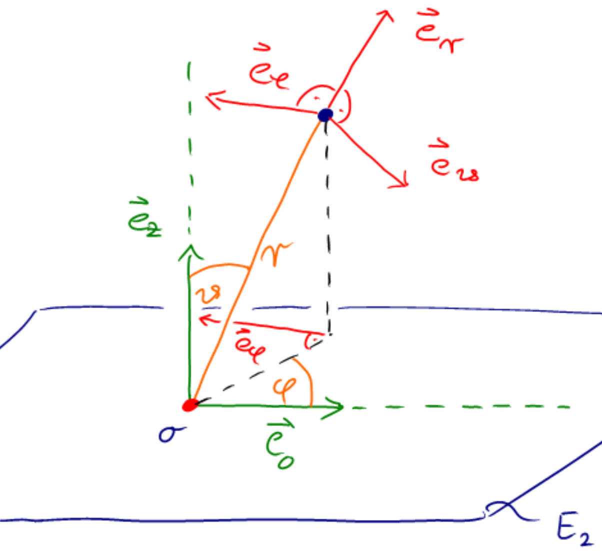
$\rightsquigarrow$ kart. Koord. bzgl. σ, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ $\quad$ $(\vec{e}_1 = \vec{e}_0, \vec{e}_3 = \vec{e}_z)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \cos\varphi \sin\vartheta \\ x_2 &= r \sin\varphi \sin\vartheta \\ x_3 &= r \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow$$

<u>Ortsvektor</u>: (bzgl. σ)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \sin\vartheta \\ r\sin\varphi \sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}_B$$

Lokale ONB: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \vec{r} = r\,\vec{e}_r \quad , \quad |\vec{r}| = r$$

Beispiel: zeitabhängige sphärische Koordinaten eines Massenpkts. seien

$$r(t) = R_0$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0$$

$$\varphi(t) = \omega t$$