Elemente der Analysis

Funktion (Abbildung)

Wertebereich

$$f : D \to W \quad ; \qquad D \subset \mathbb{R}, \quad W \subset \mathbb{R}$$

Definitionsbereich

Menge der reellen Zahlen

ordnet jedem Argument $x \in D$ genau einen Funktionswert $f(x) \in W$ zu.

Notation:

$$f : D \to W$$
$$x \mapsto f(x) = [\text{Zuordnungsvorschrift}]$$

z.B.:
- $3x^2 - 2x$
- $\sin(x)$
- $a e^{-\lambda x}$

, ...

$$f: D \to W$$
$$x \mapsto f(x) = 3x^2 - 2x$$

$\rightsquigarrow$ kurz: $f: x \mapsto 3x^2 - 2x$

kürzer: $f(x) = 3x^2 - 2x$

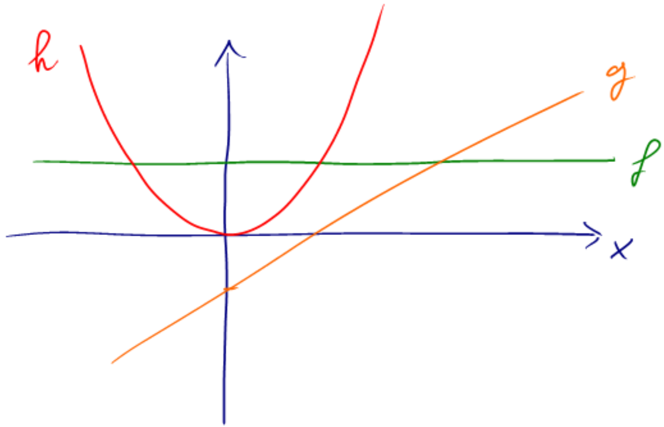
noch kürzer: $3x^2 - 2x$

Beispiele:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto a$

- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto bx - c$

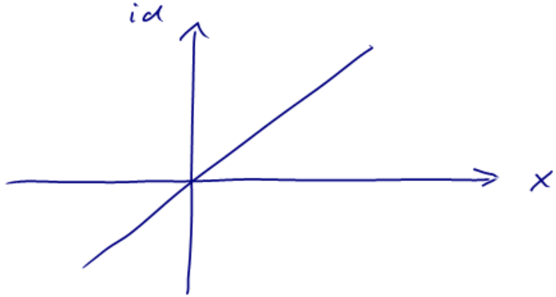
- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto dx^2$



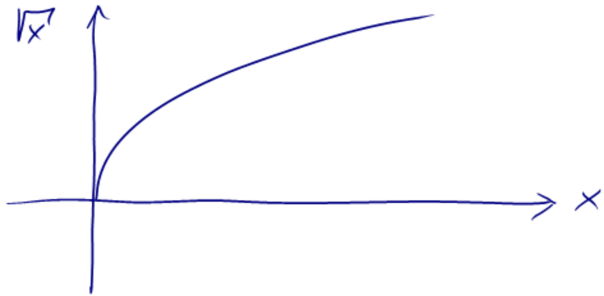
$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

- **Identische Abbildung (Identität):**

$$\begin{aligned} id : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

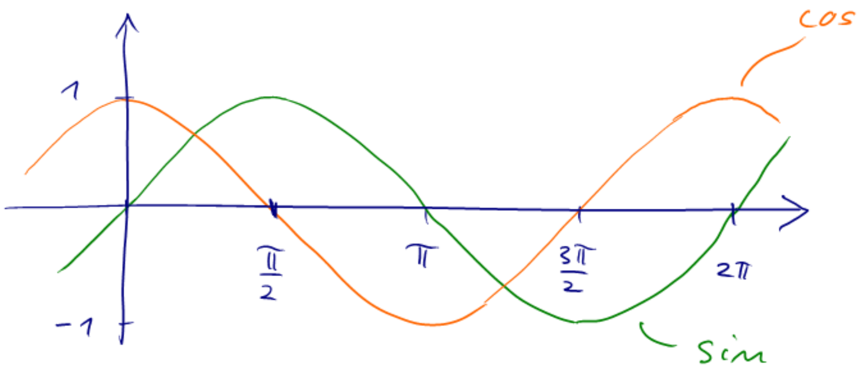


- $$\begin{aligned} \sqrt{x} : [0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

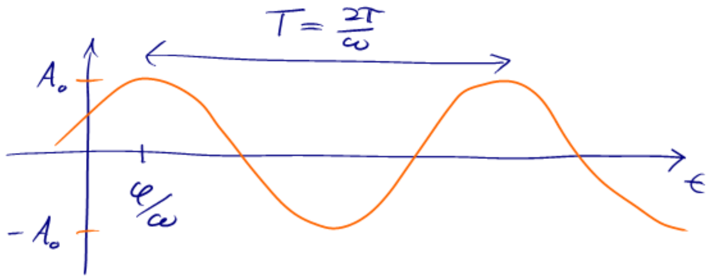


- $$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

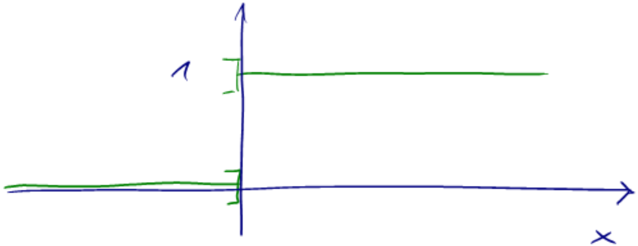
- $$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$



- $A(t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi)$:



- Stufenfunktion $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$



- <u>ganzrationale Funktion vom Grad k</u> :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k \quad ; \quad (a_k \neq 0)$$

Verknüpfungen von Funktionen

für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ erklären wir:

<u>Summe</u> $f+g : D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

<u>Skalarmultiplikation</u> $\lambda f : D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

<u>Bemerkung</u>: Summe und S.Mult. von Funktionen $D \to \mathbb{R}$ erfüllen offenbar Axiome von <u>Vektor</u>addition und -skalarmultiplikation,
$\longrightarrow$ <u>Menge</u> aller Funktionen $D \to \mathbb{R}$ bilden <u>Vektorraum</u>.

ein <u>Skalarprodukt</u> im Falle $D = [a, b]$ ist z.B. durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

gegeben (vgl. Übung) $\longrightarrow$ <u>Orthogonalität</u>, <u>Projektion</u>, ...

<u>Produkt</u> $fg : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (fg)(x) := f(x)\,g(x)$

<u>Quotient</u> $f/g : D \setminus (\text{Nullstellen von } g) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x)/g(x)$

für Funktionen $f : D_1 \to W_1$, $g : D_2 \to W_2$ mit $W_1 \subset D_2$ definieren wir

<u>Verkettung</u> (auch: <u>Komposition</u>) von f und g durch

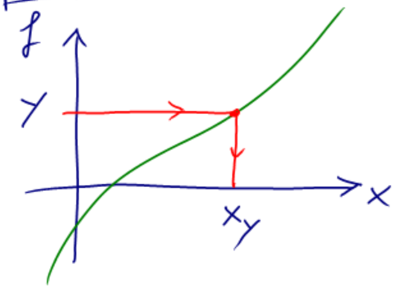
$$(g \circ f) : D_1 \to W_2$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

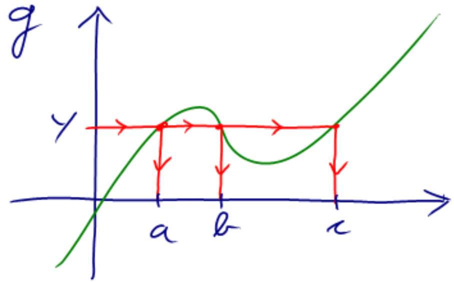
Umkehrbarkeit (Bijektivität)

Funktion $f: D \to W$ ist umkehrbar / bijektiv / 1-zu-1 g.d.w. für jedes $y \in W$ genau ein $x_y \in D$ existiert s.d.

$$f(x_y) = y .$$

Beispiele:





$x_y = a, b$ oder c ??

f umkehrbar

$\rightarrow$ Umkehrfkt.: $\boxed{f^{-1}(y) := x_y}$

g nicht umkehrbar !

Umkehrfunktion

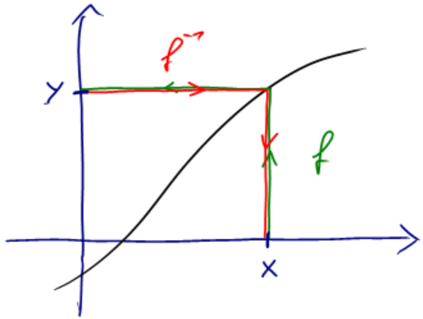
Die Umkehrfunktion f^{-1} einer umkehrbaren Fkt. $f: D \to W$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f^{-1}: W &\longrightarrow D \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) := x_y \, , \end{aligned}$$

wobei x_y eindeutig bestimmt durch $f(x_y) = y$.

schematisch:

$$\begin{array}{ccccc} f: & D & \longrightarrow & W & \\ & x & \longmapsto & y & \\ & x & \longleftarrow\!\!\shortmid & y & \\ & D & \longleftarrow & W & : f^{-1} \end{array}$$



$$\boxed{\begin{array}{ll} f^{-1} \circ f(x) = x & \text{für alle } x \in D \\ f \circ f^{-1}(y) = y & \text{für alle } y \in W \end{array}}$$

es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} g \text{ Umkehrfkt. zu } f \quad &\Longleftrightarrow \quad g \circ f(x) = x \quad \text{für alle } x \in D \\ &\Longleftrightarrow \quad f \circ g(y) = y \quad \text{für alle } y \in W \end{aligned}}$$

$(f: D \to W,\ g: W \to D)$

$$\boxed{\begin{aligned} (f^{-1})^{-1} &= f \\ (h \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ h^{-1} \end{aligned}}$$

⌈ Notation:

$f = g \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x)$ für alle x ⌋

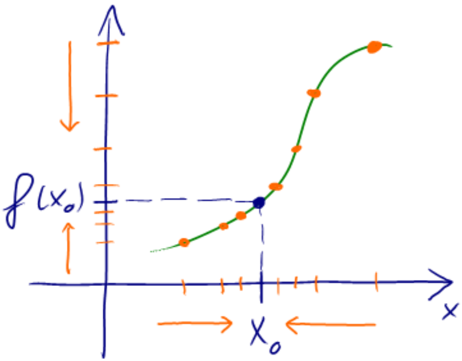
Beispiel:

$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ ist Umkehrfkt. von $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto x^2$

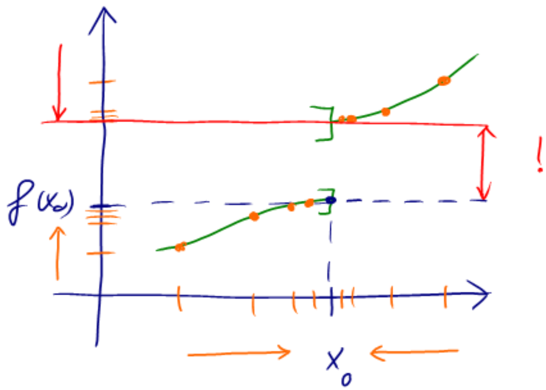
da $\quad g \circ f(x) = \sqrt{x^2} \overset{!}{=} x \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

Stetigkeit, stetige Funktionen

grob: Fkt. f stetig in x_0 :<=> "für $x \to x_0$ strebt $f(x)$ beliebig nahe gegen $f(x_0)$."



stetig in x_0

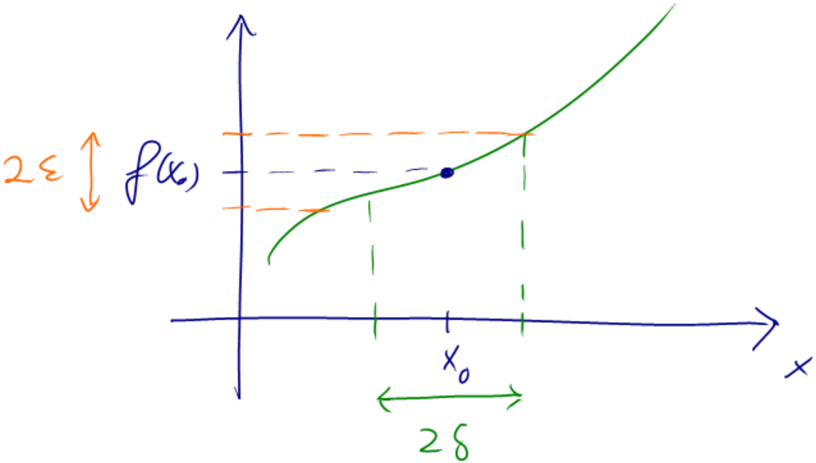


unstetig in x_0

genauer:

- Fkt. f stetig in x_0 $:\Longleftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$:

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$



- $f: D \to W$ stetige Funktion $:\Longleftrightarrow$ für alle $x \in D$: f stetig in x

Satz

Verknüpfungen und Umkehrfunktionen (sofern existent) stetiger Funktionen sind stetig.

(vgl. Analysis)

Physik: physikalische Größen hängen erfahrungsgemäß immer im stetiger Weise von einander ab!

→ "In der Physik sind alle Funktionen stetig!"

(Ausnahmen bestätigen die Regel)