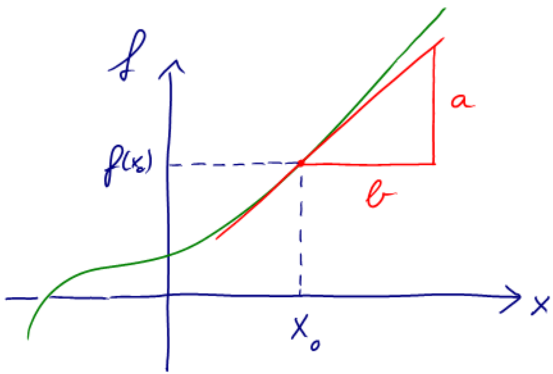
Differenzierbarkeit, Ableitung

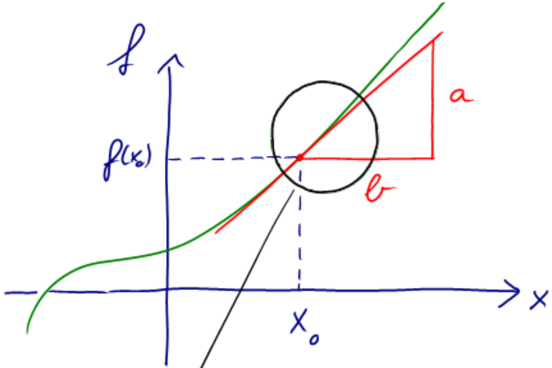
grob:

Ableitung $f'(x_0)$ von Fkt. f in x_0

$\Leftrightarrow$ Steigung der Tangente des Funktionsgraphen im $(x_0, f(x_0))$

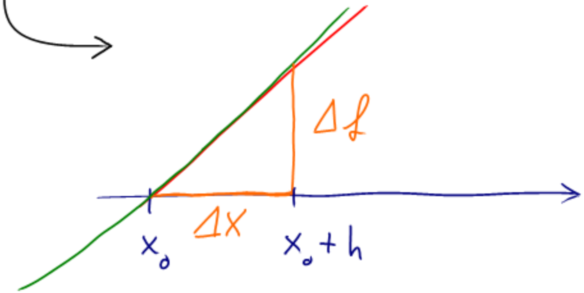


$$\boxed{f'(x_0) := \frac{a}{b}}$$



$$\boxed{f'(x_0) := \frac{a}{b}}$$

genauer:



$$\longrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{a}{b} \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

h hinreichend klein!

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \simeq f'(x_0)}$$

Differenzenquotient

Differenzierbarkeit und Ableitung

- Fkt. f differenzierbar in x_0 $:\Longleftrightarrow$ Grenzwert
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
existiert!

- ist f differenzierbar in x_0, dann ist
$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$
die Ableitung von f in x_0.

- $f : D \to W$ differenzierbar $:\Longleftrightarrow$ f in allen $x \in D$ diff.bar

- ist $f : D \to W$ diffbar, dann ist $\begin{array}{l} f' : D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$ die Ableitung von f

alternative Notationen:

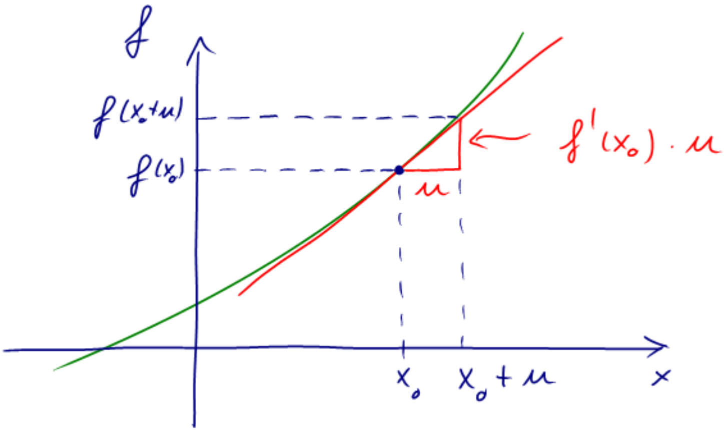
$$\boxed{f' \equiv \frac{df}{dx} \quad , \quad f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) \equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}}$$

falls Funktionsargument $\equiv$ Zeit t:

$$\boxed{f' \equiv \frac{df}{dt} \equiv \dot{f} \quad , \quad f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0) \equiv \left.\frac{df}{dt}\right|_{t_0} \equiv \dot{f}(t_0)}$$

wichtigste Anwendung der Ableitung:

Lineare Näherung einer Fkt. f in x_0:



$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+u) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\,u \\ f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) \end{aligned}}$$

d.h.

Beispiele:

a) $$\boxed{f(x) = ax + b \quad \to \quad f'(x) = a},$$

denn $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big(a(x+h) + b - (ax+b)\Big) = a \,.$$

b) $$\boxed{g(x) = x^2}:$$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{1}{h}\left(x^2 + 2hx + h^2 - x^2\right) = 2x + h \xrightarrow{h \to 0} 2x$$

d.h. $$\boxed{g'(x) \equiv (x^2)' = 2x}.$$

c) $$\boxed{h(x) = x^3}:$$

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{1}{h}\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3\right)$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2 \xrightarrow{h \to 0} 3x^2$$

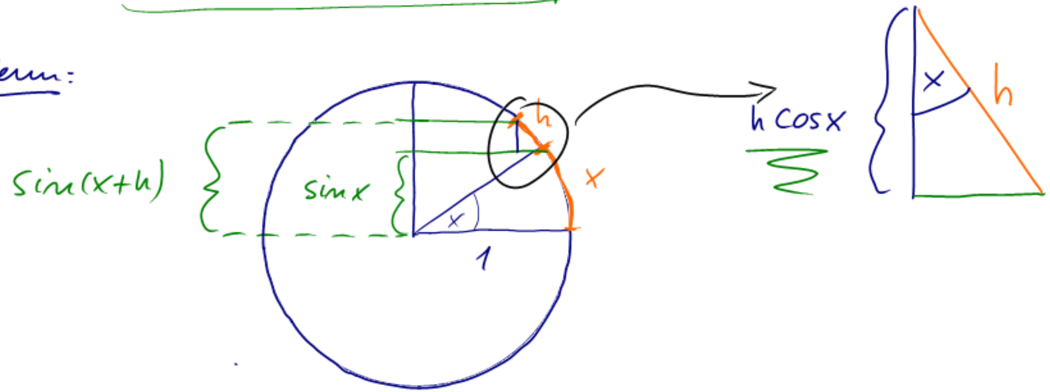
d.h. $$\boxed{h'(x) \equiv (x^3)' = 3x^2}$$

d) für $n \in \mathbb{Z} \equiv \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ ist

$$\boxed{(x^n)' = n\, x^{n-1}}$$

e) $$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

denn:



d.h. für $h \to 0$: $\frac{1}{h}\left(\sin(x+h) - \sin x\right) = \cos x$ ✓

analog: $$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

f) Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) = a^x \quad , \quad (a^x)' = ?$$

$$\frac{1}{h}\left(a^{x+h} - a^x\right) = \underbrace{\frac{1}{h}\left(a^h - 1\right)}_{\text{unabhängig von } x} a^x$$

d.h. $(a^x)' = c_a \, a^x$ mit $c_a = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(a^h - 1)$

Euler (1707–1783) : wähle a so, dass $c_a = 1$!

→ dieses so bestimmte a ist die Eulersche Zahl e

es gilt somit $\boxed{(e^x)' = e^x}$

Welchen numerischen Wert hat e?

mit $h \equiv \frac{1}{n}$ gilt wegen $\frac{1}{h}\left(e^h - 1\right) = 1$ für $h \to 0$

auch

$$n\left(e^{1/n} - 1\right) = 1 \quad \text{für } n \to \infty ,$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = e \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

d.h. $$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + 1/n\right)^n} \overset{!}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}$$

wird später gezeigt

n	1	2	3	4	//	10
$(1+1/n)^n$	2.0	2.25	2.37	2.44		2.59
$\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}$	2.0	2.5	2.67	2.71		2.71828

Ableitungsregeln:

1) $(\lambda f)' = \lambda f'$, (Linearität)

$(f+g)' = f' + g'$

2) $(f \cdot g)' = f'g + f g'$ (Produktregel)

3) $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f g'}{g^2}$$

4) $(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'$ (Kettenregel)

d.h.: $$(f(g(x)))' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{äußere}}\ \underbrace{g'(x)}_{\text{innere}}$$ Ableitung

5) $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Beispiel:

$$\left(\sin(kx)\, e^{-x^2/2\sigma^2}\right)' \overset{2)}{=} \sin(kx)'\, e^{-x^2/2\sigma^2} + \sin(kx)\left(e^{-x^2/2\sigma^2}\right)'$$

$$\overset{1)\,4)}{=} k\cos(kx)\, e^{-x^2/2\sigma^2} + \sin(kx)\, e^{-x^2/2\sigma^2}\left(-\frac{x}{\sigma^2}\right)$$

$$= \left(k\cos(kx) - \frac{x}{\sigma^2}\right) e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Höhere Ableitungen

Fkt. $f : x \longmapsto f(x)$

$\to$ Ableitung $f^{(1)} = f' : x \longmapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\to$ 2. Ableitung $f^{(2)} \equiv f'' : x \longmapsto f''(x) := (f')'(x)$

$\to$ 3. Ableitung $f^{(3)} \equiv f''' : x \longmapsto f'''(x) = (f'')'(x)$

$\vdots$

d.h. $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ für $n \geq 1$

und $f^{(0)} := f$

Beispiele:

1) $$f(x) = x^5$$

$$\rightarrow f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 5 \cdot 4\, x^3, \quad f^{(3)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3\, x^2,$$

$$f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\, x, \quad f^{(5)}(x) = 5!, \quad f^{(k)}(x) = 0 \text{ für } k \geq 6.$$

2) $$(e^x)^{(n)} = e^x. \qquad (\text{da } (e^x)' = e^x)$$

3) wegen $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$ gilt:

$$\left.\begin{aligned}
(\sin x)^{(1)} &= \cos x\\
(\sin x)^{(2)} &= -\sin x\\
(\sin x)^{(3)} &= -\cos x\\
(\sin x)^{(4)} &= \sin x\\
&\vdots
\end{aligned}\right\}\text{ d.h.: }\quad
\begin{aligned}
(\sin x)^{(2\ell)} &= (-1)^{\ell}\sin x\\
(\sin x)^{(2\ell+1)} &= (-1)^{\ell}\cos x\\
&(\ell = 0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\cos x)^{(1)} &= -\sin x\\
(\cos x)^{(2)} &= -\cos x\\
(\cos x)^{(3)} &= \sin x\\
(\cos x)^{(4)} &= \cos x\\
&\vdots
\end{aligned}\right\}\text{ d.h.: }\quad
\begin{aligned}
(\cos x)^{(2\ell)} &= (-1)^{\ell}\cos x\\
(\cos x)^{(2\ell+1)} &= -(-1)^{\ell}\sin x
\end{aligned}$$