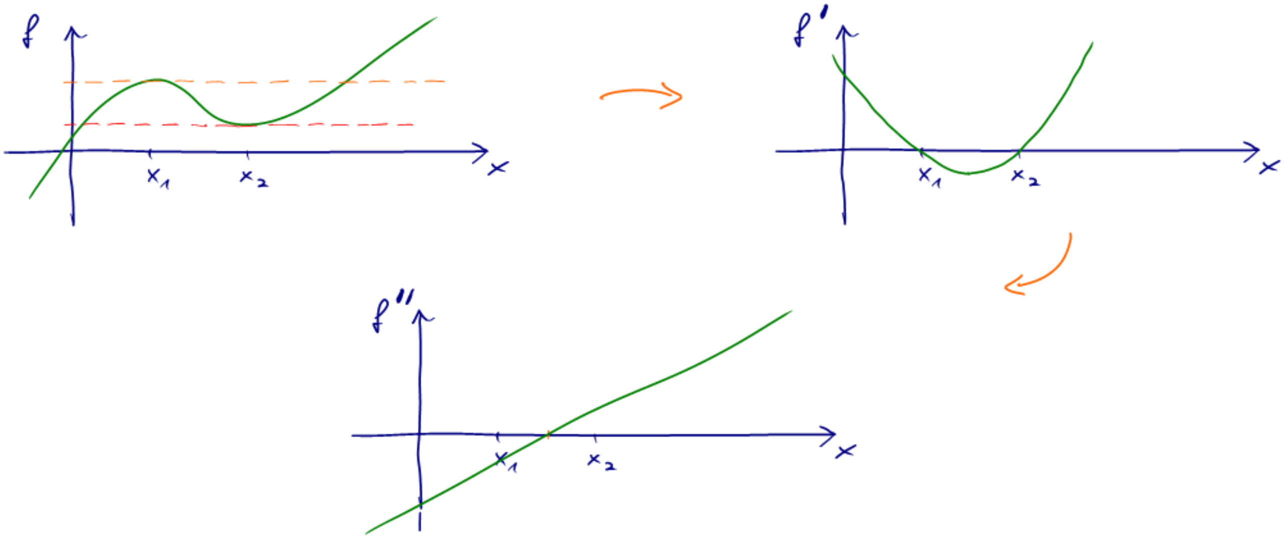
Notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums



(i) x_0 Stelle eines lokalen Extremums $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$

(ii) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $\Longrightarrow$ x_0 Stelle eines lokalen Maximums

(iii) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $\Longrightarrow$ x_0 Stelle eines lokalen Minimums

Taylor - Entwicklung

<u>Idee</u>: nähere Fkt. $f(x)$ um $x = 0$ (allgemein: $x = x_0$)

durch <u>ganzrationale Funktion n-ten Grades</u>,

$$\tilde{f}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

so, dass

$$\boxed{\tilde{f}_n^{(\ell)}(0) = f^{(\ell)}(0)}$$

für $\ell \leq n$.

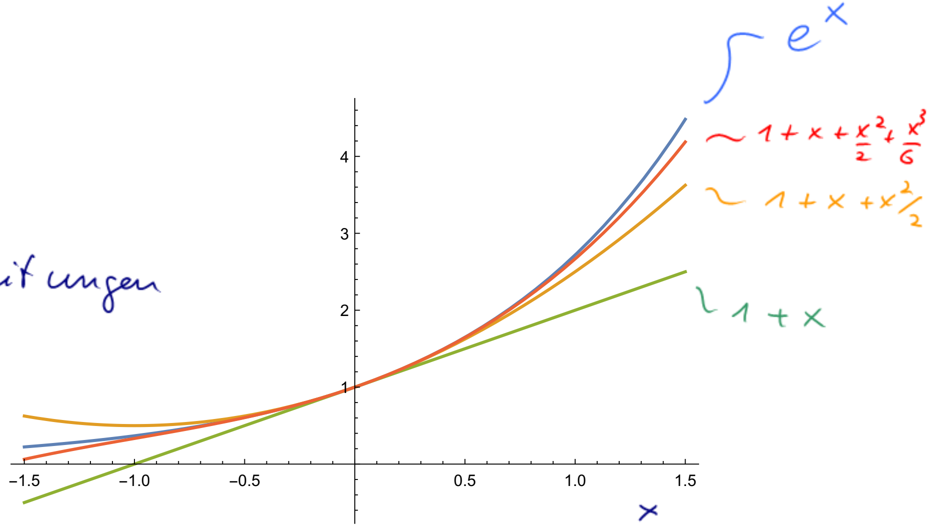
Beispiel $\longrightarrow$

__Beispiel:__

$$e^x \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} 1+x \\ 1+x+x^2/2 \\ 1+x+x^2/2+x^3/6 \end{array} \right\}$$

stimmen in $x=0$ in allen Ableitungen

bis zur $\left\{ \begin{array}{l} 1. \\ 2. \\ 3. \end{array} \right\}$ überein:



Wie müssen wir die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der Fkt.

$$\tilde{f}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \left(= \sum_{m=0}^{n} a_m x^m \right)$$

wählen, damit $\boxed{\tilde{f}_n^{(\ell)}(0) = f^{(\ell)}(0)}$ für alle $\ell \leq n$?

$$\boxed{\begin{aligned}
(x^m)^{(0)} &= \underline{x^m} \\
(x^m)^{(1)} &= m\, \underline{x^{m-1}} \\
(x^m)^{(2)} &= m(m-1)\, \underline{x^{m-2}} \\
&\vdots \\
(x^m)^{(m-1)} &= m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\, \underline{x} \\
\underline{(x^m)^{(m)}} &= m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = \boxed{m!} \\
(x^m)^{h} &= \underline{0} \quad \text{für } h > m
\end{aligned}}
\;\longrightarrow\;
\boxed{(x^m)^{(\ell)}\Big|_{x=0} = \delta_{\ell m}\, \ell!}$$

$$\longrightarrow \boxed{\tilde{f}_n^{(\ell)}(0) = \sum_{m=0}^{n} a_n (x^m)^{(\ell)}\Big|_{x=0} = a_\ell\, \ell!} \longrightarrow \boxed{\boxed{a_\ell = \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)}}$$

→ Taylor-Entwicklung (-Reihe) n-ter Ordnung von f in $x=0$:

$$\boxed{\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0) \cdot x^{\ell}}$$

... in $x = x_0$:

$$\boxed{\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(x_0) (x-x_0)^{\ell}}$$

d.h. $$\boxed{\tilde{f}_n(x_0+h) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(x_0)\, h^{\ell}}$$

Bemerkungen:

- $\tilde{f}_0(x_0+h) = f(x_0)$: „0-te Näherung"
- $\tilde{f}_1(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$: lineare Näherung
- $\tilde{f}_2(x+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$: quadratische Näherung

- eine analytische Funktion f erfüllt per def.

$$\boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)\, x^\ell}$$

Potenzreihe der Fkt. f

($\longrightarrow$ Analysis I/II)

Beispiele:

1) Taylor-Entwicklung von $\boxed{f(x) = \frac{1}{1-x}}$ um $x = 0$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = 2\,\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = 2\cdot 3\,\frac{1}{(1-x)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(\ell)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (\ell-1)\cdot \ell\,\frac{1}{(1-x)^{\ell+1}} = \ell!\,\frac{1}{(1-\underline{x})^{\ell+1}}$$

$$\rightarrow \quad f^{(\ell)}(\underline{0}) = \ell!$$

$$\rightarrow \quad \tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}\,\ell!\,x^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} x^{\ell} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

d.h. $\boxed{\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots}$

tatsächlich gilt für $|x| < 1$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots}$$

exakt!

<u>**Geometrische Reihe**</u>

2) Taylor-Entwicklung der <u>Exponentialfunktion $f(x) = e^x$</u> :

(um $x=0$)

$$f^{(\ell)}(x) = e^x \rightarrow f^{(\ell)}(0) = \underline{\underline{1}}$$

$$\rightarrow \tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} x^\ell$$

d.h. $$\boxed{e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots}$$

3) Taylor-Entwicklung von $f(x) = \sin(x)$ um $x = 0$:

mit
$$(\sin(x))^{(2\ell)} = (-1)^{\ell} \sin(x) \xrightarrow{x=0} 0$$
$$(\sin(x))^{(2\ell+1)} = (-1)^{\ell} \cos(x) \longrightarrow (-1)^{\ell}$$

folgt
$$\tilde{f}_{2n+1}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)!} \, x^{2\ell+1}$$

d.h.
$$\boxed{\sin x \simeq x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^6 - \dots + \dots}$$

4) Taylor-Ent. von $f(x) = \cos(x)$ um $x = 0$:

analog:
$$\tilde{f}_{2n}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!} \, x^{2\ell}$$

d.h.
$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \dots + \dots}$$

e^x, $\sin x$ und $\cos x$ sind <u>analytisch</u>

$\longrightarrow$ Taylor-Entwicklungen im Limes $n \to \infty$ ergeben

<u>Potenzreihendarstellungen</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \ldots \\ \sin x &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \ldots + \ldots \\ \cos x &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \ldots + \ldots \end{aligned}}$$

<u>absolut</u> konvergente Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$
($\to$ Ana. I)

insbesondere: $\underline{\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n} =: e = e^1 = \underline{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$
$= 2{,}718\ldots$