Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Klausur

Montag, den 23. Februar 2015

Bitte beschriften Sie jedes Blatt oben rechts mit Ihrem vollen Namen und lassen Sie oben links Platz zum Heften. Zum sicheren Bestehen der Klausur benötigen Sie 30 von insgesamt 60 Punkten.

1. Zweikörperproblem *20 Punkte*

Skizzieren Sie die Reduktion des Zweikörperproblem mit isotroper Wechselwirkung auf das Problem eines Teilchens im isotropen Zentralkraftfeld. Gehen Sie hierbei insbesondere auf die Begriffe *Azimuthalgleichung*, *Energiegleichung* und *effektives Potential* ein. Diskutieren Sie abschließend anhand der Energiegleichung qualitativ die möglichen Bahntypen für eine Wechselwirkung $\underline{F}_{12} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{\underline{r}}$.

2. Skalarprodukt *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen eines gleichseitigen Parallelogramms im rechten Winkel schneiden.

3. Kinematik *2+2+2=6 Punkte*

Ein Teilchen bewege sich auf der Bahn

$$\underline{r}_1(t) = R\cos(\omega t)\,\underline{e}_1 + R\sin(\omega t)\underline{e}_2 + vt\underline{e}_3.$$

Hierbei sind R, ω und v konstante Parameter, t der Zeitparameter und $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bilden eine ONB.

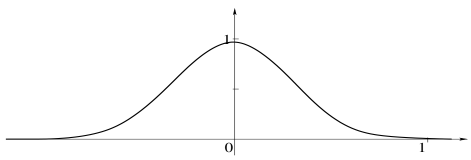
a) Skizzieren Sie für die Projektion der Bahn auf die $\underline{e}_1$-$\underline{e}_2$-Ebene. Skizzieren Sie dann grob die Bewegung in drei Dimensionen.

b) Berechnen Sie momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens.

c) Zeigen Sie, dass die Beschleunigung des Teilchens stets senkrecht zur Geschwindigkeit ist.

4. Ableitung *2+2=4 Punkte*

Das Diagramm zeigt den Graphen der Funktion f.



a) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung f' von f.

b) Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion F, deren Ableitung F' die Funktion f ergibt.

5. Differenzialgleichungen *2+2+2=6 Punkte*

Geben Sie für folgende Differenzialgleichungen jeweils eine Lösung $y(t)$ zum Anfangswert y_0 bei $t = 0$ an:

$$\dot{y} = c, \dot{y} = cy, \dot{y} = -\frac{y}{(1+t)^2}.$$

6. Stokessche Reibung *2+2=4 Punkte*

Betrachten Sie einen Körper der Masse m, der ausschließlich einer Stokesschen Reibungskraft $\underline{F}_\mathsf{R} = -\gamma\underline{p}$ unterliegt. Hierbei ist $\underline{p}$ der Impuls des Teilchens.

a) Berechnen Sie die Bahn eines solchen Körpers, der sich zur Zeit $t = 0$ mit Geschwindigkeit $\underline{v}_0 = v\underline{e}_1$ durch den Ursprung bewegt ($\underline{r}_0 = \underline{0}$).

b) Geben Sie den Abstand $d(t) = |\underline{r}(t)|$ des Körpers vom Ursprung als Funktion der Zeit an. Wo bleibt der Körper liegen?

7. Impulserhaltung *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls zweier wechselwirkender Teilchen zeitlich konstant ist, falls keine äußeren Kräfte wirken.

8. Gradient *2+2=4 Punkte*

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen ($\underline{a}$ ist ein konstanter Vektor):

$$f(\underline{r}) = \underline{a} \cdot \underline{r}, \qquad g(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|}.$$

9. Wegintegral *2+2=4 Punkte*

Gegeben sei das Potential (k ein positiver, reeller Parameter)

$$U(\underline{r}) = \frac{1}{2} k\, |\underline{r}|^2.$$

a) Berechnen Sie das zugehörige Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$.

b) Bestimmen Sie das Wegintegral über $\underline{F}(\underline{r})$ entlang eines Kreises mit Radius R, der in der Ebene parallel zur xy-Ebene mit Mittelpunkt bei $(1, 1, 1)$ liegt. Anfangs- und Endpunkt der Wegintegration sei $(1 + R, 1, 1)$.

10. Energiesatz *2+4=6 Punkte*

a) Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluss der Kraft $F(x) = -U'(x)$, x sei die Koordinate des Teilchens. Zeigen Sie, dass die Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 + U(x(t))$$

zeitlich konstant ist.

b) Es sei nun das eindimensionale Potenzial

$$U(x) = -e^{-x^2}$$

gegeben, ferner sei $m = 1$. Skizzieren Sie den Graphen von $U(x)$. Diskutieren Sie anhand des Energiesatzes qualitativ die Bahnen $x(t)$ dieses Punktteilchens zu folgenden Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ ($x_0 = x(0)$, $v_0 = \dot{x}(0)$):

$$(i) \quad x_0 = 0, \quad v_0 = 0, \qquad (ii) \quad x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \qquad (iii) \quad x_0 = 2, \quad v_0 = \frac{2}{e}.$$

Skizzieren Sie dazu jeweils $x(t)$ in einem (x, t)-Diagramm.