Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 10

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis ***Mittwoch*****, den 7. 1. 2015, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.**

34. Konservative Felder *10 Punkte*

Im Folgenden sind $a, g, k, m, \alpha, \beta$ Konstanten, r bezeichnet den Betrag des Ortsvektors $\underline{r}$ und x, y, z sind die Komponenten von $\underline{r}$ bzgl. der ONB e_1, e_2, e_3.

a) Wie lauten die Kraftfelder folgender Potentiale?

$$(i) \quad U(r) = -\frac{k}{2}r^2, \qquad (ii) \quad U(r) = \frac{\beta}{r}\,, \qquad (iii) \quad U(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}\,,$$
$$(iv) \quad U(\underline{r}) = (\underline{e}_1 \cdot \underline{r})^2, \qquad (v) \quad U(\underline{r}) = -\alpha \log \frac{x^2+y^2}{a^2}\,.$$

b) Wie kann man feststellen, ob eine Vektorfeld konservativ ist oder nicht?

c) Welche der folgenden Kraftfelder sind konservativ? Geben Sie für diese jeweils ein Potenzial an.

$$(i) \quad \underline{F}(\underline{r}) = -mg\,\underline{e}_3\,, \qquad (ii) \quad \underline{F}(\underline{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\,\hat{\underline{r}}\,, \qquad (iii) \quad \underline{F}(\underline{r}) = -\frac{\beta}{r}\,\hat{\underline{r}}\,,$$
$$(iv) \quad \underline{F}(\underline{r}) = x\,\underline{e}_3\,, \qquad (v) \quad \underline{F}(\underline{r}) = y\,\underline{e}_1 + x\,\underline{e}_2\,, \qquad (vi) \quad \underline{F}(\underline{r}) = y\,\underline{e}_1 - x\,\underline{e}_2\,.$$

35. Energiesatz in einer Dimension *10 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Dimension unter der Kraft $F(x) = -U'(x)$, x sei die Koordinate des Teilchens.

a) Zeigen Sie, dass die Energie

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{x}(t)^2 \;+\; U(x(t))$$

des Teilchens konstant ist.

b) Nun sei das Potenzial U gegeben durch

$$U(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2} ,$$

ferner sei $m = 1$. Skizzieren Sie den Graphen von $U(x)$. Diskutieren Sie anhand des Energiesatzes qualitativ die Bahnen $x(t)$ zu folgenden Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ ($x_0 = x(0)$, $v_0 = \dot{x}(0)$):

$$\begin{aligned}
(i) \quad & x_0 = 0, \quad v_0 = 0, \\
(ii) \quad & x_0 = 0, \quad v_0 = 1/\sqrt{2}, \\
(iii) \quad & x_0 = 0, \quad v_0 = 1, \\
(iv) \quad & x_0 = 0, \quad v_0 = 2, \\
(v) \quad & x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \\
(vi) \quad & x_0 = 1, \quad v_0 = -1, \\
(vii) \quad & x_0 = 10, \quad v_0 = -1 \\
(viii) \quad & x_0 = 10, \quad v_0 = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie dazu jeweils $x(t)$ in einem (x, t)-Diagramm.

36. Energiesatz *10 Punkte*

In einem Wasserstoffmolekül werden zwei Protonen durch zwei Elektronen aneinander gebunden. Der Abstand der Protonen beträgt etwa $0.7 \times 10^{-10}\ m$. Nun werden schlagartig die Elektronen entfernt. (Indem etwa das Wasserstoffmolekül durch eine dünne Folie geschossen wird. Diese fängt die Elektronen auf, läßt aber die Protonen wegen ihrer sehr viel größeren Masse fast ungehindert passieren.) Die beiden verbleibenden Protonen stoßen sich dann aufgrund der Coulomb-Kraft ab. Welche Geschwindigkeit erreichen die beiden Protonen bei großen Abständen?
(Hinweise: Die Masse eines Protons ist etwa $m_p = 1.7 \times 10^{-27} kg$, seine Ladung beträgt $e = 1.6 \times 10^{-19} C$. Die Coulomb-Kraft zwischen zwei Teilchen mit Ladungen q_1 und q_2 im Abstand r ist bekanntlich vom Betrag $F = q_1 q_2 / (4\pi\varepsilon_0 r^2)$, wobei $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/(Nm^2)$.)

37. Komet *10 Punkte*

Vor ca 2000 Jahren befand sich ein Komet am sonnennächsten Punkt seiner stark ellipitischen Bahn um die Sonne. Hier hatte der Komet eine Bahngeschwindigkeit von ca. $20 km/s$. Sein Abstand zur Sonne betrug ungefähr ein zehntel der mittleren Entfernung Sonne-Erde. Heute beobachten wir den Kometen zufällig an seinem sonnenfernsten Punkt seiner Bahn in einem Abstand von ca. dem zehnfachen der Entfernung von Sonne und Erde. Welche Bahngeschwindigkeit sollte der Komet dort haben?

– Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch! –