Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 12

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 13.01.2015, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

38. Konservative Kraftfelder *1+4+5=10 Punkte*

a) Was ist ein konservatives Kraftfeld und welche Eigenschaften besitzt es?

b) Berechnen Sie für folgende Potenziale die Kraftfelder:

$$U(\underline{r}) = \alpha(x^2+z^2), \qquad U(\underline{r}) = \frac{\alpha}{|\underline{r}|}, \qquad U(\underline{r}) = \alpha \ln|\underline{r}|, \qquad U(\underline{r}) = \alpha|\underline{r}|.$$

c) Geben Sie für folgende Kraftfelder ein Potential an, falls es sich Ihrer Meinung nach um ein konservatives Kraftfeld handelt. Begründen Sie andernfalls, dass das Kraftfeld nicht konservativ ist.

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{2\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}, \quad \underline{F}(\underline{r}) = \frac{\alpha}{|\underline{r}|^2}\,\hat{\underline{r}}, \quad \underline{F}(\underline{r}) = \underline{a}, \quad \underline{F}(\underline{r}) = (\underline{a}\cdot\underline{r})\,\underline{r}.$$

$\alpha \in \mathbf{R}$ und $\underline{a} \in \mathbf{R}^3$ seien konstant und $\hat{\underline{r}}$ bezeichne den Einheitsvektor in $\underline{r}$-Richtung.

39. Wegintegral *10 Punkte*

Ein Weg γ durchlaufe in der xy-Ebene drei Viertel eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $(2R,0,0)$. Der Weg beginne bei $(3R,0,0)$ und ende bei $(2R,-R,0)$. Skizzieren Sie γ und bestimmen Sie für folgende zwei Vektorfelder das Wegintegral $\int_\gamma \underline{F}\cdot \underline{dl}$:

$$\underline{F}(\underline{r}) = \alpha\frac{\hat{\underline{r}}}{|\underline{r}|^3}\,, \qquad\qquad \underline{F}(\underline{r}) = \exp(-\alpha r)\hat{\underline{r}}\,.$$

40. Energiesatz II

2+1+1+1+2+1+2+2+1+1=12 Punkte

Es sei das eindimensionale Potenzial $U(x) = \left(\frac{e}{2}\right)^2 x^2 e^{-x}$ gegeben. Skizzieren Sie den Graphen von $U(x)$. In diesem Potenzial bewege sich nun ein Punktteilchen der Masse $m = 1$.

a) Geben Sie den Energiesatz für das Probeteilchen in dem Potenzial an.

b) Diskutieren Sie anhand des Energiesatzes qualitativ die Bahnen $x(t)$ dieses Punktteilchens zu folgenden Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$
\begin{array}{rlll rlll rll}
(i) & x_0 = 0, & v_0 = 0, & & (ii) & x_0 = 1, & v_0 = 0, & & (iii) & x_0 = 2, & v_0 = 0, \\
(iv) & x_0 = 2, & v_0 = -1, & & (v) & x_0 = 0, & v_0 = -1, & & (vi) & x_0 = 0, & v_0 = -\sqrt{2}, \\
(vii) & x_0 = 0, & v_0 = -2, & & (viii) & x_0 = -1, & v_0 = 0, & & (iv) & x_0 = 4, & v_0 = 0.
\end{array}
$$

Skizzieren Sie dazu jeweils $x(t)$ in einem (x, t)-Diagramm.

41. Der große Wurf

4+4=8 Punkte

Es sei eine sehr große Punktmasse gegeben, die fest im Koordinatenursprung ruht und von der das Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{\underline{r}}$ ausgeht. Vom Punkt $(1, 0, 0)$ aus werde ein kleines Probeteilchen der Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit $(v_0, 0, 0)$ losgeschickt.

a) Berechnen Sie den Umkehrpunkt des Probeteilchens in Abhängigkeit von v_0. D.h. berechnen Sie den Ort, an dem die momentane Geschwindigkeit des Probeteilchens auf Null sinkt, so dass es danach wieder zurückkommt.

b) Berechnen Sie nun, wie groß v_0 mindestens sein muss, damit das Probeteilchen ins Unendliche entweichen kann.