Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 14

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 27.01.2015, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

46. Ellipsen und Hyperbeln

3+3+3=9 Punkte

Skizzieren Sie folgende drei in Polarkoordinaten (r, φ) parametrisierten Kurven in der Ebene:

$$r(\varphi) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}\,, \qquad r(\varphi) = \frac{1}{1 + 2\cos\varphi}\,, \qquad r(\varphi) = \frac{1}{1 + 0.02\cos\varphi}\,.$$

47. Eine außergewöhnliche Erhaltungsgröße II

10 Punkte

Wir betrachten wie in Aufgabe 45 ein Teilchen der Masse m im Zentralpotenzial $U(\underline{r}) = -\beta/r$. Hier wollen wir mittels der in Aufgabe 45 eingeführten Erhaltungsgröße

$$\underline{A} := \dot{\underline{r}} \times \underline{L} - \frac{\beta}{r}\underline{r}$$

zeigen, dass das Teilchen ebene Kurven der Form

$$r(\varphi) = \frac{p}{q + \epsilon\cos\varphi} \qquad (1)$$

beschreibt. Dabei sind (r, φ) geeignet gewählte Polarkoordinaten, p, q und ϵ sind geeignet gewählte Konstanten. Zeigen Sie hierzu, dass einerseits

$$\underline{A} \cdot \underline{r} = |\underline{A}| r \cos\varphi\,,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\underline{r}$ und dem konstanten Vektor $\underline{A}$ ist, und andererseits

$$\underline{A} \cdot \underline{r} = \frac{l^2}{m} - \beta r\,,$$

wobei $l = |\underline{L}|$ der Betrag des ebenfalls konstanten Drehimpulses $\underline{L}$ des Teilchens ist. Die erste Identität ist sehr einfach, für die zweite benötigen Sie eine Eigenschaft des Spatprodukts. Gleichsetzen der beiden Identitäten führt Sie dann auf die gesuchte Polardarstellung (1) der Bahn.

48. Gravitationsfeld in einer Kaverne *11 Punkte*

Hier berechnen Sie das Gravitationsfeld in einer kugelförmigen Kaverne, die irgendwo im Inneren der Erde gebaut wird. Wir nehmen wieder an, dass die Erde perfekt kugelförmig und ihre Massendichte $\rho(r) = \rho_0$ homogen ist.

a) Berechnen Sie mithilfe der Kugelschalenmethode aus der Vorlesung das Gravitationspotential und -feld im Erdinneren unter den genannten Annahmen.

b) Berechnen Sie nun auch das Gravitationspotential und -feld einer kugelförmigen Masse mit *negativer* Massendichte $\rho = -\rho_0$ und Radius r.

c) Nutzen Sie die Tatsache, dass Potentiale und auch Kraftfelder additiv sind, um nun das Gravitationspotential und -feld einer Kaverne mit Radius r genau im Erdmittelpunkt zu berechnen.

d) Wiederholen Sie den vorherigen Aufgabenteil für eine Kaverne, deren Mittelpunkt im Abstand d vom Erdmittelpunkt liegt. Welche besondere Form haben das Gravitationspotential und -feld?

49. Fall durch die Erde *10 Punkte*

In dieser Aufgabe sollen Sie herausfinden, wie lange ein reibungsfrei gleitender Schlitten der Masse m, nur angetrieben durch der Gravitation der Erde, durch gerade Röhren quer durch die Erde von einem Ende der Röhre zum anderen benötigen würde. Wir wollen hierfür davon ausgehen, dass die Erde perfekt kugelförmig und ihre Massendichte homogen ist.

a) Zunächst betrachten wir eine Röhre, die genau durch den Mittelpunkt der Erde führt. Benutzen Sie die Kugelschalenmethode aus der Vorlesung oder das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe, um die Beschleunigung $g(r)$ im jeweiligen Abstand r zum Erdmittelpunkt zu berechnen. Benutzen Sie hierfür, dass $g(R) = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, wobei der Erdradius $R = 6370\,\mathrm{km}$ ist.

b) Berechnen Sie damit nun die Geschwindigkeit $v(r)$ unter der Annahme, dass $v_0 = v(R) = 0$. Berechnen Sie anschließend die Zeit, die der Schlitten benötigt, um am anderen Ende der Erde anzukommen. Geben Sie ein von der Rechnung unabhängiges Argument dafür, dass der Schlitten genau am anderen Ende der Röhre zum Stillstand kommt.

c) Betrachten Sie nun eine gerade Röhre, die im Abstand d am Erdmittelpunkt vorbeiführt. Wiederholen Sie die Analyse aus den beiden ersten Aufgabenteilen. Berücksichtigen Sie hierbei, dass ausschließlich der Anteil der Erdbeschleunigung $v(r)$ verändert, der parallel zur Röhre zeigt!