Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 2

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmethLA2014.html/*

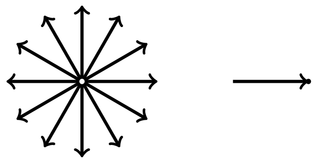
Abgabe bis Dienstag, den 21.10.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

4. Skalarprodukt I

4+5+1=10 Punkte

a) Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt aller in der Figur zur Rechten abgebildeten Vektoren mit dem einzelnen Vektor ganz rechts. Alle Vektoren sind von Länge 1 (in geeigneten Einheiten).



b) Es seien die Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ und der Wert der Skalarprodukte untereinander gegeben: $\underline{u}\cdot\underline{u} = 1, \underline{v}\cdot\underline{v} = 1, \underline{w}\cdot\underline{w} = 4, \underline{u}\cdot\underline{v} = \frac{1}{4}, \underline{u}\cdot\underline{w} = 0, \underline{v}\cdot\underline{w} = \frac{9}{4}$. Berechnen Sie für die Vektoren $\underline{a} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{b} = 2\underline{v} - \underline{w}$ und $\underline{c} = -\underline{u} + 3\underline{v}$ die Beträge $|\underline{a}|, |\underline{b}|, |\underline{c}|$ und die Skalarprodukte $\underline{a}\cdot\underline{b}$, $\underline{a}\cdot\underline{c}$ und $\underline{b}\cdot\underline{c}$.

c) Zeigen Sie, dass insbesondere für das in der Vorlesung definierte Skalarprodukt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* gilt:

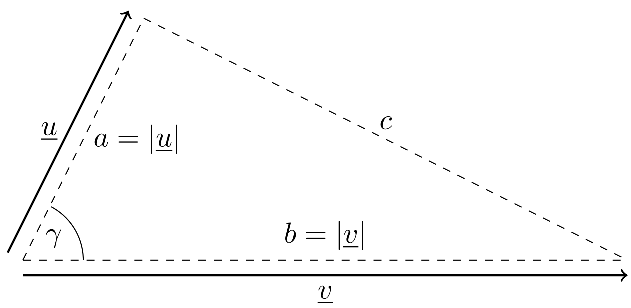
$$|\underline{u}\cdot\underline{v}| \leq |\underline{u}||\underline{v}| \,.$$

5. Skalarprodukt II

1+3+3+3=10 Punkte

a) Wie lautet der Kosinussatz?

b) Beweisen Sie den Kosinussatz mithilfe des Skalarprodukts. Als Inspiration diene nebenstehende Skizze.



c) Seien a und b nun die Kantenlängen eines Parallelogramms, e und f die Längen der Diagonalen. Verfahren Sie analog zu Aufgabenteil **b)**, um $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ zu zeigen.

d) Zeigen Sie schließlich, dass die Diagonalen eines gleichseitigen ($a = b$) Parallelogramms senkrecht zueinandern sind.

6. Grad- und Bogenmaß

2+2+2+2+4+2 = 14 Punkte

Um die Größe eines Winkels anzugeben, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die Ihnen wohl vertrauteste ist das Gradmaß, z.B. 90°. Eine weitaus praktischere Methode bietet das Bogenmaß.

Hierzu nimmt man einen Kreis mit Radius 1 in einer beliebigen Längeneinheit LE und assoziiert mit einem Winkel, den zwei Strecken miteinander bilden, die **Länge des Kreissegments**, das die beiden Strecken vom Vollkreis abtrennen, wenn ihr gemeinsamer Schnittpunkt im Mittelpunkt des Kreises liegt. Die Länge des Vollkreises in diesen beliebigen Längeneinheiten LE beträgt natürlich $2\pi \cdot 1\ LE = 2\pi\ LE$. Da diese Längeneinheiten in keiner Rechnung eine Rolle spielen, werden sie ganz unterschlagen und ein Winkel von beispielsweise $180°$ entspricht somit π im Bogenmaß.

a) Fertigen Sie zu der vorangegangenen Erklärung zum Bogenmaß eine entsprechende Skizze an (Kreis, zwei Strecken, Winkel, Kreissegment), aus der der Zusammenhang zwischen Bogenmaß und Gradmaß hervorgeht.

b) Geben Sie folgende Winkel im Bogenmaß an: $360°, 180°, 90°, 45$.

c) Geben Sie nun folgende Winkel im Bogenmaß an: $30°, 60°, 120°, 150$.

d) Leiten Sie nun eine Umrechnungsformel zwischen Gradzahlen α und Bogenzahlen x her.

e) Berechnen Sie nun die Werte von $\cos(x)$ für $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, indem Sie für jeden der fünf Fälle Dreiecke mit entsprechendem Winkel betrachten und einfache geometrische Zusammenhänge ausnutzen. Schreiben Sie die Werte in eine Tabelle.

f) Wiederholen Sie den vorangegangenen Aufgabenteil für $\sin(x)$ und erstellen Sie auch hierfür eine Tabelle. Was fällt Ihnen auf?

7. Trigonometrische Additionstheoreme *2+4=6 Punkte*

a) Wie lauten die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus?

b) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} 2\cos^2\alpha &= 1 + \cos(2\alpha) \quad \text{und} \\ 2\sin^2\alpha &= 1 - cos(2\alpha). \end{aligned}$$