Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

# Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 5

*Wintersemester 2014*

**Webpage:** *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/*

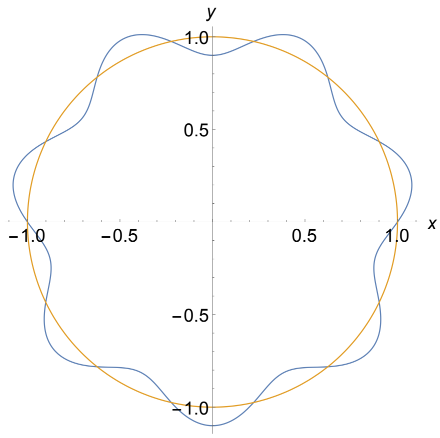
**Abgabe bis Dienstag, den 11.11.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.**

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

## 15. Teilchenbahn in Polarkoordinaten

*4+3+3=10 Punkte*

Gegeben sei nebenstehende, oszillierende Bahnkurve $\underline{r}(t)$ in der xy-Ebene (die hellere Kreislinie ist nur eine Hilfslinie). Es gelte $\underline{r}(0) = (1, 0)$ und der Punkt $(0, 0.9)$ wird erstmalig gegen den Uhrzeigersinn zur Zeit $t = T/4$ erreicht, d.h. $\underline{r}(T/4) = (0, 0.9)$. Hierbei ist $T$ ein fest gewählter reeller Parameter. Alle übrigen Informationen sind in der Skizze enthalten.




**a)** Finden Sie die geeignete Parametrisierung $\underline{r}(t)$ in Polarkoordinaten für die skizzierte Bahnkurve. (Tipp: Es handelt sich um die Summe einer gleichförmigen Kreisbewegung und einer Oszillation.)

**b)** Berechnen Sie $\underline{v}(t)$ und $\underline{a}(t)$ entlang dieser Bahnkurve.

**c)** Berechnen Sie $\underline{v}(t)$ und $\underline{a}(t)$ zur Zeit $t = T/2$ und zeichnen Sie beide Vektoren in eine entsprechende Skizze. Wiederholen Sie dies auch für $t = T/28$.

## 16. Differenzialgleichungen

*1+4+6+2=13 Punkte*

**a)** Erklären Sie mit eigenen Worten, was eine Differenzialgleichung ist.

**b)** Raten Sie für folgende einfache Differenzialgleichungen Lösungen $y(t)$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$ ($c \in \mathbf{R}$ ist eine Konstante):

$$\dot{y} = 0, \qquad \dot{y} = c, \qquad \dot{y} = t^2, \qquad \dot{y} = cy.$$

**c)** Bestimmen Sie für folgende Differenzialgleichungen jeweils die Lösung $y(t)$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$ durch Trennung der Variablen:

$$\dot{y} = -\alpha y, \qquad \dot{y} = \frac{y}{1+t}, \qquad \dot{y} = (1+t)y^3 .$$

**d)** Zeigen Sie, dass $y(t) = (\frac{a}{2} + b)\mathrm{e}^t - \frac{a}{2}(\sin t + \cos t)$ Lösung der Differenzialgleichung $\dot{y} = a \sin t + y$ zum Anfangswert $y(0) = b$ ist.

## 17. Euler-Verfahren *4+3=7 Punkte*

**a)** Betrachten Sie das Anfangswertproblem $\dot{y} = -1/(2y)$ mit $y(0) = 1$. Finden Sie mittels des Euler-Verfahrens die Lösung des Anfangswertproblems. Sie haben dieses numerische Verfahren schon in der Vorlesung kennengelernt. Wählen Sie hierzu eine Schrittweite kleiner als $0.1$ und $t \in [0, 1]$.

**b)** Zeichnen Sie Ihre numerische Lösung und vergleichen Sie diese mit der entsprechenden exakten Lösung, die Sie durch Trennung der Variablen erhalten.

## 18. Verfaulende Vegetation *10 Punkte*

In tropischen Wäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von $80\%$ pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich neue Bio-Masse an, sagen wir 7 Gramm pro Quadratzentimeter und Jahr. Stellen Sie eine Differenzialgleichung für die Menge $u(t)$ des Abfalls auf einem Quadratzentimeter auf und lösen Sie diese. Zu welchem stationärem Wert konvergiert $u(t)$ für große Zeiten $t$ ?