Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 6

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 18.11.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

19. Teilchen im Stömungsfeld

5+5+4=14 Punkte

Eine zweidimensionale Strömung sei durch das Geschwindingkeitsfeld $\underline{V}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} -\beta x \\ \beta y \end{pmatrix}$ mit $\beta > 0$ gegeben.

a) Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld und diskutieren Sie anhand dieser Skizze die Bahnkurven von Partikeln in dieser Strömung. Welche Bahnen ergeben sich etwa für Partikel an Anfangsorten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$?

b) Die Bahn $\underline{r}(t)$ eines Partikels in der Strömung genügt offenbar der Gleichung $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{V}(\underline{r}(t))$. Finden Sie die allgemeinen Lösungen dieser Bewegungsgleichung. Bestimmen Sie anhand Ihrer Lösung nun die exakten Bahnen $\underline{r}(t)$ zu den unter **a)** genannten Anfangsorten. Skizzieren Sie diese Bahnen.

c) Zeigen Sie, dass die Bahnkurve einer Lösung zu einem Anfangswert, der *nicht* auf einer der beiden Koordinatenachsen liegt, eine Hyperbel bildet.

20. Ausfluss eines Trichters

5+5+4=14 Punkte

Betrachten Sie das Abfließen von Wasser aus einem Trichter. Dieser sei gegeben durch einen auf seiner undichten Spitze stehenden Kegel mit rechtwinkligem Öffnungswinkel, der bis zur Höhe h_0 mit Wasser gefüllt ist.

a) Erklären Sie, warum für den Flüssigkeitsfüllstand $h(t)$ die Differentialgleichung $\dot{h}(t) = -\alpha/h(t)$ gilt. Hierbei bezeichnet α eine durch die physikalischen Gegebenheiten bestimmte Konstante.

b) Geben Sie nun die Lösung der eben gegebenen Differentialgleichung für $h(t)$ zum Anfangswert $h(t = 0) = h_0$ an und skizzieren Sie diese (**Tipp:** Trennung der Variablen). Zu welchem Zeitpunkt ist der Trichter leer?

c) Wie Sie sehen, verläuft das Abfließen nicht linear mit der Zeit. Entfernen wir uns von einem kegelförmigen Trichter, lässt sich dennoch $h(t) = h_o - vt$, also eine konstante Abflussgeschwindigkeit $\dot{h}(t) \equiv -v$ erzielen. Welche Abhängigkeit bzw. was müssen wir hierfür ändern? Schlagen Sie aufgrund Ihrer Beobachtung eine geeignete Form vor.

21. Bakterienkultur

2+4+6=12 Punkte

Wir betrachten eine Petrischale mit einem für ein spezielles Bakterium geeignetem Nährmedium. Die zeitabhängige Anzahl dieser Bakterien in der Petrischale sei mit $y(t)$ bezeichnet. Die DGL, die die Entwicklung dieser Bakterienkultur approximiert, lautet $\dot{y} = \alpha y - \lambda y^2$.

a) Interpretieren Sie die DGL: weshalb gibt es einen Term αy und was könnte der Grund für den Term $-\lambda y^2$ sein?

b) Um zunächst ein qualitatives Bild von der Entwicklung der Bakterienpopulation zu erhalten, betrachten wir die beiden Grenzfälle $y \ll \alpha/\lambda$ und $y \gg \alpha/\lambda$. Finden Sie also die Lösungen für $y(t)$ in diesen beiden Grenzfällen. Können Sie von diesen Lösungen ausgehend eine Aussage über $y(t)$ für $t \to \infty$ treffen?

c) Finden Sie nun die exakte Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten $y_0 < \alpha/\lambda$ und $y_0 > \alpha/\lambda$ (**Tipp:** Trennung der Variablen und dann Partialbruchzerlegung). Skizzieren Sie beide Lösungen.