Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 7

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 25.11.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

23. Dynamische Massenbestimmung *13 Punkte*

Es seien zwei Körper K_1 und K_2 gegeben, die durch einen Draht verbunden sind. Aufgrund der durch den Draht vermittelten Kräfte bewegen sich die beiden Körper auf folgenden Bahnen (wobei $R_1 = 1\,\mathrm{m}$, $R_2 = 2\,\mathrm{m}$ und $\omega = 2\pi\,\mathrm{s}^{-1}$):

$$K_1 : \underline{r}_1(t) = R_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 : \underline{r}_2(t) = -R_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Sei nun die Masse des ersten Köpers $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$. Berechnen Sie mithilfe der Information über die Bahnkurven der beiden Körper die Masse des zweiten Körpers.

b) Welche Kraft übt K_1 auf K_2 aus? Und welche Kraft übt K_2 auf K_1 aus?

c) Zur Zeit $t_1 = \pi/\omega$ werde der Draht durchtrennt. Auf welchen Bahnkurven bewegen sich K_1 und K_2 für $t > t_1$? Skizzieren Sie die kompletten Bahnkurven $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$.

24. Newtonsche Dynamik *12 Punkte*

Ein Körper der Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ ruhe zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$ im Ursprung O eines Inertialsystems, d.h. $\underline{r}_0 = \underline{0}$ und $\underline{v}_0 = \underline{0}$. Für Zeiten $t \in [0\,\mathrm{s}, 7\,\mathrm{s}]$ wirke auf den Körper die Kraft $\underline{F}(t)$, die wie folgt definiert ist ($f = 1\,\mathrm{N}$):

$$\underline{F}(t) = \begin{cases} f\underline{e}_1 & \text{für } 0\,\mathrm{s} < t \le 1\,\mathrm{s} \\ 0 & \text{für } 1\,\mathrm{s} < t \le 2\,\mathrm{s} \\ -f\underline{e}_1 & \text{für } 2\,\mathrm{s} < t \le 3\,\mathrm{s} \\ f\underline{e}_2 & \text{für } 3\,\mathrm{s} < t \le 4\,\mathrm{s} \\ 0 & \text{für } 4\,\mathrm{s} < t \le 5\,\mathrm{s} \\ -f\underline{e}_2 & \text{für } 5\,\mathrm{s} < t \le 6\,\mathrm{s} =: t_1 \end{cases} .$$

Berechnen Sie $\underline{r}(t_1)$ und $\underline{v}(t_1)$. Skizzieren Sie die Bahnkurve des Körpers.

25. Stokessche Reibung *15 Punkte*

Betrachten Sie einen Körper der Masse m, der ausschließlich einer Stokesschen Reibungskraft $\underline{F}_{\mathsf{R}}(t) = -\gamma \underline{p}(t)$ unterliegt.

a) Berechnen Sie die Bahn eines solchen Körpers, der sich zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $\underline{v}_0 = v\underline{e}_1$ durch den Ursprung bewegt ($\underline{r}_0 = \underline{0}$), d.h. finden Sie die Lösung der Bewegungsgleichung $\dot{\underline{p}} = -\gamma \underline{p}$ für genannte Anfangsbedingungen.

b) Geben Sie auch den Abstand $d(t) := |\underline{r}(t)|$ des Körpers vom Ursprung als Funktion der Zeit an. Wo bleibt der Körper liegen? (**Tipp:** Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} d(t)$.)

c) Nehmen wir nun an, es wirke zusätzlich zur Reibungskraft $\underline{F}_{\mathsf{R}}(t)$ eine konstante Kraft $\underline{F}_0$. Die Bahn ergibt sich wiederum als Lösung der DGL $\dot{\underline{p}} = -\gamma \underline{p} + \underline{F}_0$ zu den unter **a)** genannten Anfangsbedingungen. Finden Sie die Lösung. (**Tipp:** Summe aus allgemeiner Lösung für die homogene DGL und spezieller Lösung für die inhomogene DGL.)

d) Berechnen Sie die Grenzgeschwindigkeit $\lim_{t\to\infty} \underline{v}(t)$, der sich die Geschwindigkeit des Körpers für immer größere Zeiten t annähert.