Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 8

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 02.12.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

26. Tetraeder

6+4=10 Punkte

a) Zeigen Sie, dass das Volumen eines von den Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$ und $\underline{w}$ aufgespannten Tetraeders

$$V = \frac{1}{6}|(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}|$$

beträgt. Benutzen Sie hierzu, dass hier $V = \frac{1}{3}$Grundfläche · Höhe gilt.

b) Folgern Sie aus dieser Beziehung, dass

$$|(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}| = |(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u}| = |(\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v}| \, .$$

27. Drehimpuls

6 Punkte

Die ebene Bahn eines Punktteilchen der Masse m in einer Ebene senkrecht zu $\underline{e}_z$ sei mittels zeitabhängiger Polarkoordinaten, $r(t), \varphi(t)$, beschrieben. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls des Teilchens (bzgl. des Koordinatenursprungs o) durch

$$L = m\, r^2 \dot{\varphi}\, \underline{e}_z$$

gegeben ist.

28. Gesamtimpuls und externe Gesamtkraft

3+3+3+6=15 Punkte

a) Gegegeben sei ein System zweier miteinander wechselwirkender Punktteilchen mit Massen m_1 und m_2. Externe Kräfte liegen nicht vor. Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls $\underline{P}$ des Systems zeitlich konstant ist. Argumentieren Sie bitte sauber, an welcher Stelle Sie welches Newtonsche Axiom benutzen!

b) Die Punktteilchen in **a)** unterliegen nun zusätzlich externen Kräften $\underline{F}_1^{ex}$ und $\underline{F}_2^{ex}$. Zeigen Sie, dass

$$\dot{\underline{P}} = \underline{F}^{ex} \, ,$$

wobei $\underline{F}^{ex} = \underline{F}_1^{ex} + \underline{F}_2^{ex}$ die externe Gesamtkraft auf das System ist.

c) Zeigen Sie, dass unter den gleichen Bedingungen wie in **b)** der Ortsvektor $\underline{R}(t)$ des Schwerpunkts der zwei Punktteilchen der Gleichung

$$M\ddot{\underline{R}} \;=\; \underline{F}^{ex}$$

genügt. Hierbei ist $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse des Systems.

d) Betrachten Sie nun ein System von N miteinander wechselwirkenden Punktteilchen mit Massen $m_1, \dots, m_N$ und externen Kräften $\underline{F}_1^{ex}, \dots, \underline{F}_N^{ex}$. Zeigen Sie wiederum, dass

$$\underline{\dot{P}} = \underline{F}^{ex} \quad \text{und} \quad M\underline{\ddot{R}} = \underline{F}^{ex} \,,$$

wobei nun $\underline{F}^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{ex}$ und $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

29. Das Boot

3+3+3=9 Punkte

Sie sitzen auf einem Boot mitten auf einem ruhigen See. Die Gesamtmasse für Sie und Ihr Boot sei mit $100\,\mathrm{kg}$ veranschlagt. Um sich von der Stelle zu bewegen, ziehen Sie an einer langen Leine, die an einem zweiten Boot auf dem See befestigt ist. Sie ziehen immer mit Ihrer maximalen Kraft $100\,\mathrm{N}$ und wir vernachlässigen Reibungskräfte und die Masse der Leine.

a) Im ersten Fall betrage die Gesamtmasse des anderen Bootes $1000\,\mathrm{kg}$. Berechnen Sie die Beschleunigung $a(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und zurückgelegte Strecke $s(t)$ Ihres Bootes. Was passiert mit dem Schwerpunkt des Systems bestehend aus beiden Booten?

b) Nun sei das zweite Boot eine Modellbauboot der Masse $40\,\mathrm{kg}$. Sie ziehen wieder mit $100\,\mathrm{N}$ an der Leine. Berechnen Sie wiederum die Beschleunigung $a(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und zurückgelegte Strecke $s(t)$ Ihres Bootes.

c) Nun hat jemand am Ufer endlich ein Einsehen mit Ihren Versuchen, sich über den See zu manövrieren, und wirft Ihnen eine am Ufer befestigte Leine herüber, an der Sie wieder mit $100\,\mathrm{N}$ ziehen. Was ändert sich im Vergleich zu **a)/b)**?