Mathematische Methoden – Blatt 10

Wintersemester 2021/22

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 18.01.2022, 23:59 Uhr

40. Zur Diskussion

0 Punkte

- Wie lautet die Differenzialgleichung, die einen ungedämpften harmonischen Oszillator beschreibt? Was ist deren allgemeine Lösung?
- Wie unterscheidet sich das Verhalten von gedämpften und ungedämpften harmonischen Oszillatoren? Was passiert, wenn man die Stärke der Dämpfung ändert?
- Wie muss man die Differenzialgleichung eines harmonischen Oszillators anpassen, um eine zusätzliche externe Kraft zu beschreiben?

41. Freier Fall mit Luftwiderstand

2 + 8 = 10 Punkte

Ein Körper fällt unter dem Einfluss einer konstanten Schwerebeschleunigung g und einer zum Betragsquadrat der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandskraft senkrecht zu Boden. Der Betrag v der Geschwindigkeit genügt damit der DGL

$$\dot{v} = g - \alpha v^2,$$

wobei der Parameter $\alpha > 0$ die Stärke der Luftwiderstandskraft beschreibt.

- Welche Grenzggeschwindigkeit v_g erreicht der fallende Körper nach sehr langer Zeit?

Hinweis: $\dot{v} = 0$.

- Bestimmen Sie $v(t)$ für $v_0 = 0$ bei $t = 0$. Skizzieren Sie diese Lösung.

Hinweis: Trennung der Variablen, $\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{2}{1-x^2}$.

42. Gedämpfter harmonischer Oszillator I

4 Punkte

Betrachten Sie einen gedämpften harmonischen Oszillator beschrieben durch

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{1}{2} \gamma^2 x = 0.$$

Bestimmen Sie mit einem Exponentialansatz die allgemeine Lösung der DGL.

43. Gedämpfter harmonischer Oszillator II

3+6=9 Punkte

Ein allgemeiner gedämpfter harmonischer Oszillator wird beschrieben durch

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

- a) Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten des Oszillators für $\frac{\gamma^2}{4} < \frac{k}{m}$, $\frac{\gamma^2}{4} > \frac{k}{m}$ und $\frac{\gamma^2}{4} = \frac{k}{m}$.
- b) Bestimmen und skizzieren Sie mithilfe der allgemeinen Lösungen dieser DGL aus der Vorlesung die speziellen Lösungen mit $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$, jeweils für $\frac{\gamma^2}{4} < \frac{k}{m}$, $\frac{\gamma^2}{4} > \frac{k}{m}$ und $\frac{\gamma^2}{4} = \frac{k}{m}$.

44. Getriebener harmonischer Oszillator

1+3=4 Punkte

In der Vorlesung wurde ein gedämpfter harmonischer Oszillator besprochen, der zusätzlich von einer externen, periodischen Kraft $f_0 \cos(\Omega t)$ getrieben wird, $f_0 > 0$.

- a) Wie lautet die Amplitude, also die maximale Auslenkung, des getriebenen Oszillators als Funktion von f_0 , Ω , der Dämpfungskonstante γ , und $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$?
Hinweis: Vorlesung
- b) Wie groß ist die Amplitude für $\Omega = 0$? Bestimmen Sie unter der Annahme $\frac{\gamma^2}{2} < \omega^2$, bei welchem Ω die Amplitude maximal ist, und wie groß sie dort wird. Wie lauten Ihre Ergebnisse näherungsweise wenn die Dämpfung sehr schwach ist, $\gamma \rightarrow 0$?