

Mathematische Methoden – Blatt 11

Wintersemester 2021/22

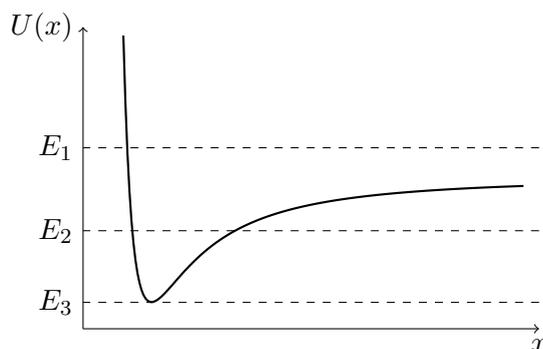
Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 25.01.2022, 23:59 Uhr

45. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Wann ist ein Kraftfeld konservativ?
- b) Finden Sie ein Potenzial zum Kraftfeld $\vec{A} = y \vec{e}_x + x \vec{e}_y$.
- c) Betrachten Sie ein Teilchen in einer Dimension mit Energie E , das sich in folgendem Potenzial bewegt. Beschreiben Sie das Verhalten des Teilchen jeweils für die Energien $E = E_1$, $E = E_2$ und $E = E_3$.



46. Kraftfelder und Potenziale

3+4+3+3=13 Punkte

- a) Zeigen Sie, dass $\Phi(\vec{r}) = -G(|\vec{r}|)$ ein Potenzial eines Zentralkraftfelds $\vec{F}(\vec{r}) = g(|\vec{r}|)\hat{r}$ ist. Dabei sei g eine beliebige reelle Funktion, und G eine Stammfunktion von g .
- b) Wie lauten die Kraftfelder zu folgenden Potenzialen?

$$\Phi_1(\vec{r}) = x^2 + z, \quad \Phi_2(\vec{r}) = -\frac{M}{|\vec{r}|}, \quad \Phi_3(\vec{r}) = \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle, \quad \Phi_4(\vec{r}) = \frac{1}{2}k|\vec{r}|^2.$$

- c) Geben Sie jeweils ein Potenzial zu folgenden Kraftfeldern an.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{a}, \quad \vec{C}(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 \vec{r}.$$

- d) Bestimmen Sie das Wegintegral des Kraftfelds $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{a} = \text{const.}$ entlang der Kurve $\vec{r}(t) = \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(2\omega t) \vec{e}_y$, mit $0 \leq t < \frac{2\pi}{\omega}$.

47. Drehimpuls

3+3+3=9 Punkte

- a) Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss eines Zentralkraftfelds. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls des Teilchens erhalten ist.

Jetzt wollen wir den Drehimpuls eines Teilchens in einem bestimmten Kraftfeld betrachten:

- b) Zeigen Sie, dass $\vec{r}(t) = \cos(\omega t) \vec{e}_x + 2 \sin(\omega t) \vec{e}_y$ die Bahn eines Teilchens ist, welches sich im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -m\omega^2 \vec{r}$ bewegt, wobei m die Masse des Teilchens ist.
- c) Bestimmen sie den Drehimpuls des Teilchens aus Aufgabenteil b).

48. Energieerhaltung

3 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen, welches sich unter dem Einfluss eines konservativen Kraftfelds bewegt. Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Teilchens erhalten ist.